ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

2006

ՀՏԴ 512.64 (07)
ԳՄԴ 22.143 у73
Ա 296

Երաշխավորված է տպագրության Երևանի պետական համալսարանի Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից

Ալեքսանյան Ա.
Գծային հանրահաշիվ, Եր., Երևանի համալս. հրատ., էջ. 171

Դասագիրքն ամփոփում է վերջին տասնամյակում հեղինակի կողմից ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետում կարդացվող դասախոսությունները: Ֆակուլտետի ուսումնական պլանով հաստատված «Հանրահաշիվ» առարկայի ծրագիրը հիմնված է հեղինակի այս և «Հանրահաշիվ (խմբեր, օղակներ, դաշտեր)» դասագրքերում ներառված նյութի վրա:

Ա $\frac{1602040000}{704(02)-2006}$ ԳՄԴ 22.143 у73

ISBN 5-8084-0808-3

Գծային տարածություններ

Դիցուք L-ը բազմություն է, իսկ K-ն կամ իրական թվերի $\mathbb{R}$ դաշտն է, կամ էլ կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ դաշտը: Շարադրվող նյութը և արդյունքները հիմնականում համընկնում են $\mathbb{R}$ և $\mathbb{C}$ դաշտերի (և ընդհանրապես կամայական դաշտի) դեպքում, ուստի մենք կօգտագործենք դաշտի K նշանակումը, ծածկելով միանգամից $\mathbb{R}$ և $\mathbb{C}$ դաշտերի դեպքերը: Բոլոր այն դեպքերում, երբ արդյունքները տարբեր են $\mathbb{R}$-ի և $\mathbb{C}$-ի համար հատուկ կնշենք, թե որ դաշտն ի նկատի ունենք:

Ընդունված է ասել, որ L բազմության վրա սահմանված է գումարման գործողություն, եթե գոյություն ունի այնպիսի $L \times L \to L$ արտապատկերում, որ բավարարում է հետևյալ պայմաններին ($L \times L$-ի (a,b) տարրին համապատասխանող L-ի տարրը նշանակված է $a+b$-ով).

- $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $a+b = b+a$
- L-ում գոյություն ունի մի տարր, որը նշանակվում է 0-ով, որ յուրաքանչյուր $a \in L$ համար $a+0 = 0+a = a$
- $\forall a \in L \; \exists b \in L,\; a+b = b+a = 0$

Նաև ասում են, որ L-ի վրա սահմանված է K դաշտի թվերով բազմապատկման գործողություն, եթե գոյություն ունի մեկ այլ արտապատկերում $K \times L \to L$ ($K \times L$-ի (λ, a) տարրին համապատասխանող տարրը նշանակված է λa-ով), որ բավարարում է

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$
$$1a = a$$

պայմաններին:

Սահմանում: L բազմությունը կոչվում է **գծային տարածություն** K դաշտի նկատմամբ, եթե նրա վրա սահմանված են գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններ, որոնք բավարարում են

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$$
$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

պայմաններին:

Դյուրին է ստուգել, որ $0a = 0,\ \lambda 0 = 0$ և $(-1)a = -a$:

Իսկապես՝

$$a + 0a = 1a + 0a = (1+0)a = 1a = a,$$

ուստի

$$0a = 0,\ \lambda a + \lambda 0 = \lambda(a+0) = \lambda a \Rightarrow \lambda 0 = 0,$$

և

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1+(-1))a = 0a = 0 \Rightarrow (-1)a = -a:$$

Նաև, եթե $\lambda a = 0$, ապա $\lambda = 0$ կամ $a = 0$. Իրոք, եթե $\lambda \neq 0$, ապա

$$0 = \lambda^{-1}(\lambda a) = (\lambda^{-1}\lambda)a = 1a = a:$$

Սահմանում: L գծային տարածության M ենթաբազմությունը կոչվում է **գծային ենթատարածություն** (կամ պարզապես ենթատարածություն), եթե

1. $a, b \in M \Rightarrow a + b \in M$ (այսինքն M-ը փակ է գումարման նկատմամբ)

2. $\lambda \in K,\ a \in M \Rightarrow \lambda a \in M$ (այսինքն M-ը փակ է թվով բազմապատկման նկատմամբ)

Այս երկու պայմանները կարելի է փոխարինել մեկ համարժեք պայմանով

$$\lambda, \mu \in K, a, b \in M \Rightarrow \lambda a + \mu b \in M$$

Օրինակներ

1. $K[x]$-ը՝ բոլոր բազմանդամների բազմությունը, որոնց գործակիցները K դաշտից են գծային տարածություն է K-ի նկատմամբ:

2. $K[x]$-ի բոլոր n-ից ոչ բարձր կարգի բազմանդամները ենթատարածություն են կազմում $K[x]$-ում:

3. Հարթության վեկտորները գծային տարածություն են կազմում իրական թվերի դաշտի նկատմամբ, իսկ որևէ վեկտորին կոլինեար վեկտորների բազմությունը ենթատարածություն է կազմում այդ տարածության մեջ:

4. $(n \times m)$-չափանի իրական տարրերով մատրիցները կազմում են գծային տարածություն իրական թվերի դաշտի նկատմամբ, իսկ վերին եռանկյունաձև մատրիցները կազմում են ենթատարածություն:

5. $(0,1)$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը գծային տարածություն է իրական թվերի դաշտի նկատմամբ, իսկ նույն հատվածում ածանցելի ֆունկցիաները կազմում են ենթատարածություն:

6. Բուլյան ֆունկցիաների Ժեգալկինի բազմանդամները կազմում են գծային տարածություն $F_2 = \{0,1\}$ երկու էլեմենտանոց պարզ դաշտի նկատմամբ, իսկ գծային ֆունկցիաները կազմում են ենթատարածություն:

7. n-չափանի թվային վեկտորների գծային տարածությունը K դաշտի նկատմամբ սահմանվում է հետևյալ կերպ. $V_n(K) \equiv \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K,\ i = 1, \ldots, n\}$, իսկ բոլոր վեկտորները, որոնց համար $\alpha_1 = 0$ կազմում են

Ընթացատարածություն:

Գծային անկախություն

L գծային տարածության $a_1, a_2, \ldots, a_m$ տարրերի (էլեմենտների) **գծային կոմբինացիա** է կոչվում հետևյալ արտահայտությունը՝ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$, որտեղ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ գործակիցները K դաշտի կամայական տարրեր են:

Սահմանում: L գծային տարածության $a_1, a_2, \ldots, a_m$ տարրերը (կամ տարրերի համակարգը) կոչվում են **գծորեն անկախ**, եթե $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ պայմանից հետևում է, որ $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$:

Այսինքն գծորեն անկախ տարրերի գծային կոմբինացիան կարող է զրոյական լինել միայն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր գործակիցները զրոյական են:

Անվերջ բազմությունը կլինի գծորեն անկախ, եթե նրա կամայական վերջավոր ենթաբազմությունը գծորեն անկախ է:

L գծային տարածության $a_1, a_2, \ldots, a_m$ տարրերը (կամ տարրերի համակարգը) կլինեն **գծորեն կախյալ**, եթե կգտնվեն $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, ոչ բոլորը հավասար 0, այնպիսին, որ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$:

Նկատենք, որ կամայական համակարգ, որ պարունակում է զրոյական տարրը գծորեն կախյալ է: Մեկ ոչ զրոյական տարրից բաղկացած համակարգը գծորեն անկախ է: Գծորեն անկախ համակարգի և ոչ մի տարր չի արտահայտվում համակարգի մնացած տարրերի և ոչ մի գծային կոմբինացիայով:

Օրինակներ

1. $V_n(K)$ տարածության մեջ ընտրենք հետևյալ թվային վեկտորների համակարգը.

$$\{(\underbrace{1,0,0,\dots,0}_{n}),(\underbrace{0,1,0,\dots,0}_{n}),(\underbrace{0,0,1,0,\dots,0}_{n}),\dots,(\underbrace{0,\dots,0,1}_{n})\}$$

Այս համակարգը գծորեն անկախ է։

2. $1,x,x^2,x^3,\dots,x^n$ բազմանդամների համակարգը գծորեն անկախ է։

3. $1,x,x^2,x^3,\dots,x^n,\dots$ բազմանդամների անվերջ համակարգը գծորեն անկախ է։

4. $(1,1,1),(1,2,3),(2,3,4)$ համակարգը գծորեն կախյալ է, քանի որ

$$(2,3,4)=(1,1,1)+(1,2,3)։$$

Գծային թաղանթ

Սահմանում: L գծային տարածության M ենթաբազմության **գծային թաղանթ** է կոչվում M-ի տարրերից կազմված բոլոր հնարավոր գծային կոմբինացիաների բազմությունը:

Գծային թաղանթը կնշանակենք հետևյալ կերպ՝ M^*: Ակնհայտ է, որ M^*-ը գծային ենթատարածություն է L-ում:

Դիցուք տրված է L գծային տարածության ենթատարածությունների կամայական (վերջավոր կամ անվերջ) բազմություն: Դյուրին է ստուգել, որ այդ ենթատարածությունների հատումը (որը դատարկ չէ, քանի որ պարունակում է զրոյական տարրը) նորից գծային ենթատարածություն է L-ում:

$L(M)$-ով նշանակենք L գծային տարածության M ենթաբազմությունը պարունակող բոլոր ենթատարածությունների բազմությունը: Քանի որ $M \subseteq M^*$, ապա $M^* \in L(M)$ և ուրեմն $\bigcap\limits_{H \in L(M)} H \subseteq M^*$:

Մյուս կողմից, եթե $H \in L(M)$, ապա $M^* \subseteq H$, քանի որ $M \subseteq H$ և H-ը պարունակում է իր տարրերի բոլոր գծային կոմբինացիաները: Հետևաբար, $M^* \subseteq \bigcap\limits_{H \in L(M)} H$, և ուրեմն $M^* = \bigcap\limits_{H \in L(M)} H$:

Այսպիսով ստացանք, որ բազմության գծային թաղանթը դա այդ բազմությունն իր մեջ պարունակող ամենափոքր գծային ենթատարածությունն է:

Բազիս

Սահմանում: L գծային տարածության B ենթաբազմությունը կոչվում է տարածության **բազիս**, եթե

1. B-ն գծորեն անկախ է

2. $B^* = L$

Փաստորեն բազիսի տարրերի գծային կոմբինացիայով կարելի է արտահայտել L-ի կամայական տարր, և դա հնարավոր չէ անել B-ի կամայական սեփական ենթաբազմության միջոցով: Բազիսի միջոցով ներկայացումը միակն է: Դիցուք երկու գծային կոմբինացիա ներկայացնում են միևնույն տարրը: Այդ երկու ներկայացումներում մասնակցում են վերջավոր քանակությամբ տարրեր B-ից, որոնց կնշանակենք $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$-ով: Ուստի այդ երկու ներկայացումները կարող ենք գրել որպես $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ բազմության տարրերի գծային կոմբինացիաներ և, ուրեմն, $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k$: Հետևաբար,

$$(\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)a_k = 0$$

և $a_1, a_2, \ldots, a_k$-ի անկախությունից բխում է, որ

$$(\lambda_1 - \mu_1) = (\lambda_2 - \mu_2) = \ldots = (\lambda_k - \mu_k) = 0$$

և

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_k = \mu_k:$$

Թեորեմ 1.

Եթե գծային տարածությունն ունի գոնե մեկ վերջավոր բազիս, ապա բոլոր բազիսները վերջավոր են և ունեն միևնույն հզորությունը:

Ապացույց. Դիցուք $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$-ն L տարածության վերջավոր բազիսն է և B-ն մեկ այլ բազիս է: Վերցնենք մեկ տարր B բազիսից և նշանակենք այն b_1-ով: Քանի որ A-ն բազիս է, ապա b_1-ը կարելի է ներկայացնել այդ բազիսի միջոցով`

$$b_1=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n \qquad (1)$$

ընդ որում առանց ընդհանրությունը կորցնելու կարող ենք համարել, որ $\lambda_1\neq 0$ (բոլոր λ-ները չեն կարող միաժամանակ 0 լինել): Այստեղից ստանում ենք`

$$a_1=\lambda_1^{-1}b_1-\lambda_1^{-1}\lambda_2 a_2-\ldots-\lambda_1^{-1}\lambda_n a_n \qquad (2)$$

Համոզվենք այժմ, որ $\{b_1,a_2,\ldots,a_n\}$ համակարգը նույնպես բազիս է: Իրոք, $a_1,\ldots,a_n$-ի կամայական գծային կոմբինացիայում a_1-ը կփոխարինենք (2)-ով և կստանանք $b_1,a_2,\ldots,a_n$-ի գծային կոմբինացիա: Այսինքն, $A^*=\{b_1,a_2,\ldots,a_n\}^*$: Ստուգենք $\{b_1,a_2,\ldots,a_n\}$-ի գծորեն անկախությունը.

$$\mu_1 b_1+\mu_2 a_2+\ldots+\mu_n a_n=0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{համաձայն } (1)\text{-ի}}$$

$$\mu_1(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n)+\mu_2 a_2+\ldots+\mu_n a_n=0\Rightarrow$$

$$\mu_1\lambda_1 a_1+(\mu_1\lambda_2+\mu_2)a_2+\ldots+(\mu_1\lambda_n+\mu_n)a_n=0:$$

Քանի որ $a_1,\ldots,a_n$-ը գծորեն անկախ է, ապա $\mu_1\lambda_1=0$, $\mu_1\lambda_i+\mu_i=0,\ i=2,3,\ldots,n$: Բայց $\lambda_1\neq 0$ ուրեմն $\mu_1=0$ և $\mu_i=0$, $i=2,3,\ldots,n$, այսինքն բոլոր μ_i-րը հավասար են 0-ի և $\{b_1,a_2,\ldots,a_n\}$-ն գծորեն անկախ է:

Այսպիսով, մենք կարողացանք b_1-ով փոխարինել a_i-ից մեկը և ստացանք մի նոր բազիս: Ցույց տանք թե ինչպես կարելի է այդ պրոցեսը շարունակել:

Դիցուք արդեն մի քանի b_i-ներ ենք տեղադրել a_i-րի փոխարեն և ստացել ենք նոր բազիս՝

$$\{b_1,\ldots,b_k,a_{k+1},\ldots,a_n\} \tag{3}$$

որտեղ $k<n$։

Նշենք, որ B-ն չի կարող սրանով սպառվել, քանի որ այդ դեպքում $B=\{b_1,\ldots,b_k\}$ և a_{k+1}-ը չի պատկանում B^*-ին (դա հետևում է (3)-ի գծային անկախությունից), ուրեմն B-ն բազիս չէ։ Ուստի B-ն չի սպառվել։

Վերցնենք մեկ նոր տարր B-ից, որ (3)-ից չէ և նշանակենք այն b_{k+1}-ով։ Պարզ է, որ b_{k+1}-ը արտահայտվում է (3)-ի միջոցով.

$$b_{k+1}=\beta_1 b_1+\ldots+\beta_k b_k+\gamma_{k+1}a_{k+1}+\gamma_{k+2}a_{k+2}+\ldots+\gamma_n a_n \tag{4}$$

Ակնհայտ է, որ γ_i-ից առնվազն մեկը զրո չէ։ Հակառակ դեպքում B-ի տարրերը կլինեն գծորեն կախյալ։ Կարող ենք համարել, որ $\gamma_{k+1}\neq 0$։ Այժմ ստանում ենք

$$a_{k+1}=-\gamma_{k+1}^{-1}\beta_1 b_1-\ldots-\gamma_{k+1}^{-1}\beta_k b_k+\gamma_{k+1}^{-1}b_{k+1}-\gamma_{k+1}^{-1}\gamma_{k+2}a_{k+2}-\ldots-\gamma_{k+1}^{-1}\gamma_n a_n \tag{5}$$

Ապացուցենք, որ $\{b_1,\ldots,b_k,b_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_n\}$-ը բազիս է։ (5)-ից հետևում է, որ

$$\{b_1,\ldots,b_k,b_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_n\}^*=\{b_1,\ldots,b_k,a_{k+1},\ldots,a_n\}^*։$$

Եթե

$$\lambda_1 b_1+\ldots+\lambda_k b_k+\lambda_{k+1}b_{k+1}+\mu_{k+2}a_{k+2}+\ldots+\mu_n a_n=0,$$

ապա, օգտվելով (4)-ից, ստանում ենք՝

$$(\lambda_1+\lambda_{k+1}\beta_1)b_1+\ldots+(\lambda_k+\lambda_{k+1}\beta_k)b_k+\lambda_{k+1}\gamma_{k+1}a_{k+1}+$$

$$(\mu_{k+2}+\lambda_{k+1}\gamma_{k+2})a_{k+2}+\ldots+(\mu_n+\lambda_{k+1}\gamma_n)a_n=0։$$

Քանի որ (3)-ը բազիս է, ապա բոլոր գործակիցները զրոյական են՝ $\lambda_{k+1}\gamma_{k+1}=0,\quad \lambda_i+\lambda_{k+1}\beta_i=0,\quad \mu_j+\lambda_{k+1}\gamma_j=0,\quad i=1,2,\ldots,k,$ $j=k+2,k+3,\ldots,n$։ Բայց $\gamma_{k+1}\neq 0$, ուստի $\lambda_{k+1}=0$ և $\lambda_i=0$, $\mu_j=0$,

$i = 1,2,\ldots,k,\ j = k+2, k+3,\ldots,n$, այսինքն

$$\{b_1,\ldots,b_k,b_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_n\}$$

համակարգը գծորեն անկախ է:

Շարունակելով պրոցեսը, A-ի բոլոր տարրերը կփոխարինենք B-ի տարրերով և կստանանք տարածության նոր բազիս՝ $\{b_1,\ldots,b_n\}$: Եթե $B \neq \{b_1,\ldots,b_n\}$, ապա B-ում այլ տարրեր էլ կան և բազիսի հատկություններից հետևում է, որ այդ տարրերը չեն արտահայտվում գծորեն $b_1,\ldots,b_n$-ով, ինչն անհնարին է: Որեմն $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$, B-ն վերջավոր է և $|B| = |A|$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարկ է նշել, որ թեորեմը ճիշտ է նաև անվերջ բազիսի դեպքում, այսինքն՝ գծային տարածության բոլոր բազիսներն ունեն միևնույն հզորությունը:

Սահմանում: L գծային տարածության չափը դա նրա բազիսի տարրերի հզորությունն է: Չափը նշանակվում է հետևյալ կերպ՝ $\dim(L)$: Եթե $\dim(L)$-ը վերջավոր է, ապա տարածությունը կոչվում է վերջավոր չափանի:

Այս պահից ի վեր մենք կդիտարկենք միայն վերջավոր չափանի գծային տարածությունները:

Թեորեմ 2.

Եթե M-ը L գծային տարածության ենթատարածությունն է, ապա

1. M-ի կամայական բազիս կարելի է ընդլայնել

մինչև L-ի բազիս և $dim(M) \leq dim(L)$

2. $dim(M) = dim(L) \Leftrightarrow M = L$

Ապացույց. Դիցուք $\{a_1,\ldots,a_m\}$ –ը M ենթատարածության բազիսն է: Եթե $M = L$, ապա $\{a_1,\ldots,a_m\}$-ը նաև L-ի բազիսն է: Եթե $M \subset L$, ապա կգտնվի մեկ տարր, որը չի պատկանում M-ին: Նշանակենք այդ տարրը a_{m+1}-ով ՝ $a_{m+1} \in L \backslash M$: Պարզ է, որ $\{a_1,\ldots,a_m,a_{m+1}\}$ համակարգը գծորեն անկախ է և նրա գծային թաղանթը $m+1$ չափանի ենթատարածություն է, որի մեջ պարունակվում է M-ը: Նշանակենք այն M_1-ով: Եթե $M_1 \subset L$, ապա նույն եղանակով կգտնվի $a_{m+2} \in L \backslash M_1$ և կկառուցենք $M_2 = \{a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},a_{m+2}\}^*$: Պարզ է, որ $M \subset M_1 \subset M_2$ և $\dim(M) < \dim(M_1) < \dim(M_2)$: Քանի որ L-ը վերջավոր չափանի է, այս պրոցեսը վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո կհանգեցնի L-ին, այսինքն կստանանք

$$M \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k = \{a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},a_{m+2},\ldots,a_{m+k}\}^* = L$$

և $\{a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},a_{m+2},\ldots,a_{m+k}\}$-ը L-ի բազիսն է:

Հետևանք.

Ամեն մի գծային տարածություն ունի բազիս:

Անցման մատրիցը

Դիցուք $\{e_1,\dots,e_n\}$-ը L գծային տարածության (K դաշտի նկատմամբ) բազիսն է: Կամայական $x \in L$ ներկայացվում է բազիսի միջոցով $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$: Նշանակենք $\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ և $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, ապա x-ի բազիսային ներկայացումը կարտագրվի հետևյալ ձևով՝ $x = \Lambda\mathcal{E}$:

$\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ վեկտորը կանվանենք $x \in L$ տարրի **կոորդինատային վեկտոր** $\mathcal{E}$ բազիսում:

Դիցուք $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$-ն և $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$-ն L-ի երկու բազիսներ են: Յուրաքանչյուր d_i'-ն ունի ներկայացում $\mathcal{E}$ բազիսում $d_i' = \alpha_{i1}e_1 + \dots + \alpha_{in}e_n$, $i = 1,\dots,n$: Ստացվում է հետևյալ $n \times n$-չափանի մատրիցը՝

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

որը կանվանենք բազիսից բազիս **անցման** մատրից, քանի որ $\mathcal{D} = T\mathcal{E}$:

Դիցուք Q-ն $\mathcal{D}$-ից $\mathcal{E}$-ին անցման մատրիցն է, այսինքն՝ $\mathcal{E} = Q\mathcal{D}'$: Պարզ է, որ $\mathcal{E} = QT\mathcal{E}$ և $E\mathcal{E} = QT\mathcal{E}$, որտեղ E-ն միավոր մատրիցն է (անկյունագծի տարրերը համապատասխան են 1-ի, իսկ մնացածը զրոյական են): Ստանում ենք՝ $(E-QT)\mathcal{E}=0$ և, քանի որ $\mathcal{E}$-ի տարրերը գծորեն անկախ են՝ $E-QT=0$: Իսկապես, նշանակենք β_{ij}-ով $E-QT$-ի տարրերը: Յուրաքանչյուր $i\in\{1,\ldots,n\}$ համար կստանանք $\beta_{i1}e_1+\ldots+\beta_{in}e_n=0$: Հետևաբար $\beta_{i1}=\ldots=\beta_{in}=0$: Ուստի $E-QT=0$ և $E=QT$: Վերջին հավասարումից ստացվում է, որ T և Q մատրիցները իրար հակադարձ են, հետևաբար չվերասերված (այսինքն det $\neq 0$) են և $Q=T^{-1}$:

Դիցուք $\mathcal{E}$-ն բազիս է և $T=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ չվերասերված մատրից է: Բազմապատկենք T-ն $\mathcal{E}$-ով և ստացված սյունը նշանակենք $\mathcal{D}$-ով: Այսինքն

$$T\mathcal{E}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=\mathcal{D}:$$

Եթե $\mathcal{D}^*\neq L$, ապա $\mathcal{D}$-ի տարրերը գծորեն կախյալ են և $\dim(\mathcal{D}^*)<n$: Բայց

$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=T^{-1}\mathcal{D}$$

և ամեն մի e_i-ին արտահայտվում է $\mathcal{D}$-ի տարրերի գծային կոմբինացիայով, ուստի $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}^*$ և $\mathcal{E}^*\subseteq\mathcal{D}^*$: Վերջին հարաբերությունից ստացվում է, որ $\dim(\mathcal{E}^*)\leq\dim(\mathcal{D}^*)<n$: Սա հակասում է $\dim(\mathcal{E}^*)=n$ պայմանին, որն անհրաժեշտորեն բխում է $\mathcal{E}$-ի բազիս լինելուց: Այսպիսով, $\dim(\mathcal{D}^*)=n$ և $\mathcal{D}$-ն էլ բազիս է:

Ամփոփելով վերն ապացուցածը, ստանում ենք հետևյալ պնդումը.

ա) կամայական երկու բազիս իրար են կապված անցման մատրիցով,

բ) չվերասերված մատրիցով բազմապատկված բազիսը նորից բազիս է:

Դիցուք $\mathcal{E}$-ն ու $\mathcal{D}$-ն բազիսներ են, $\mathcal{E} = T\mathcal{D}$ և x-ի բազիսային ներկայացումն է $\mathcal{E}$ բազիսում $x = \Lambda\mathcal{E}$: Գտնենք x-ի բազիսային ներկայացումը $\mathcal{D}$-ում $x = \Lambda\mathcal{E} = \Lambda(T\mathcal{D}) = (\Lambda T)\mathcal{D}$: Քանի որ բազիսային ներկայացումը միարժեք է, ապա x-ի կոորդինատները $\mathcal{D}$-ում դա ΛT-ն են:

Այսպիսով գծային տարածության տարրի կոորդինատային վեկտորը նոր բազիսում ստանալու համար անհրաժեշտ է հին բազիսում կոորդինատային վեկտորը բազմապատկել բազիսից բազիս անցման մատրիցով:

Ենթատարածությունների գումարը

Ինչպես արդեն նշել ենք, գծային տարածության ենթատարածությունների կամայական ընտանիքի հատումը նորից գծային ենթատարածություն է: Այն ամենամեծ (ըստ ներդրվածության) ենթատարածությունն է, որ պարունակվում է տրված ընտանիքի յուրաքանչյուր ենթատարածության մեջ:

Ենթատարածությունների միավորումը սակայն, բացի բացառիկ դեպքերից, (երբ մեկ ենթատարածությունն ընկած է մյուսի մեջ) չի հանդիսանում գծային տարածություն: Պարզ է, որ ամենափոքր ենթատարածությունը, որն ընդգրկում է երկու ենթատարածությունների միավորումը, դա միավորման գծային թաղանթն է:

Դիցուք L_1 և L_2 գծային ենթատարածություններ են L գծային տարածության մեջ: Ստուգենք այժմ, որ $L_1 \cup L_2$ բազմության գծային թաղանթը համընկնում է հետևյալ գծային ենթատարածության հետ

$$L_1 + L_2 = \{a + b \mid a \in L_1, b \in L_2\},$$

որը կոչվում է L_1 և L_2 գծային ենթատարածությունների **գումար**:

Եթե $a_1 + b_1$ և $a_2 + b_2$ պատկանում են $L_1 + L_2$-ին, ապա

$$\lambda(a_1 + b_1) + \mu(a_2 + b_2) = \underbrace{(\lambda a_1 + \mu a_2)}_{\in L_1} + \underbrace{(\lambda b_1 + \mu b_2)}_{\in L_2} \in L_1 + L_2$$

և $L_1 + L_2$-ը գծային ենթատարածություն է:

Համոզվենք, որ $(L_1 \cup L_2)^* = L_1 + L_2$: Ունենք $L_1 + L_2 \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$, քանի որ $a + b \in L_1 + L_2$ հանդիսանում է $L_1 \cup L_2$ բազմության տարրերի գծային կոմբինացիա: Մյուս կողմից $L_1 \cup L_2$ բազմության տարրերի կամայական գծային կոմբինացիա ունի

Հետևյալ տեսքը՝

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m,$$

որտեղ $x_i \in L_1$ և $y_j \in L_2$, $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,m$: Ակնհայտ է, որ

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \in L_1 \text{ և } \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m \in L_2,$$

ուստի և

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m = a + b \in L_1 + L_2$$

և $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq L_1 + L_2$:

Թեորեմ 3.

L գծային տարածության L_1 և L_2 ենթատարածությունների համար ստույգ է՝

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$$

Ապացույց. Դիցուք $e_1,\ldots,e_n$-ը $L_1 \cap L_2$-ի բազիսն է: Համաձայն Թեորեմ 2-ի այդ բազիսը կարող ենք ընդլայնել մինչև L_1-ի բազիսը՝ $e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k$ և համապատասխանաբար L_2-ի բազիսը՝ $e_1,\ldots,e_n,b_1,\ldots,b_m$: Եթե մեզ հաջողվի կառուցել $L_1 + L_2$-ի մի բազիս, որը պարունակում է $n + k + m$ տարր, ապա թեորեմն ապացուցված կլինի: Ապացուցենք, որ

$$e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m$$

համակարգը $L_1 + L_2$-ի բազիսն է: Սկզբից ստուգենք, որ այս համակարգի գծային թաղանթը համընկնում է $L_1 + L_2$-ի հետ: Ակնհայտ է, որ

$$e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m$$

համակարգի թաղանթն ընկած է $L_1 + L_2$-ի մեջ: Դիցուք $x + y \in L_1 + L_2$, $x \in L_1$ և $y \in L_2$: Պարզ է, որ x-ը կարելի ստանալ $e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k$ համակարգի գծային կոմբինացիայով, իսկ y-ը՝

$e_1,\ldots,e_n,b_1,\ldots,b_m$-ի գծային կոմբինացիայով: Այս երկու գծային կոմբինացիաների գումարը տալիս է $x+y$ տարրի ներկայացումը $e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m$ համակարգի գծային կոմբինացիայով, ուստի

$$(L_1+L_2)^* = \{e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m\}^*:$$

Մնաց ապացուցել, որ

$$e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m$$

համակարգը գծորեն անկախ է: Դիցուք

$$\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n+\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_ka_k+\beta_1b_1+\ldots+\beta_mb_m = 0:$$

Վերջին արտահայտությունն արտագրենք հետևյալ կերպ՝

$$\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_ka_k = -\lambda_1e_1-\ldots-\lambda_ne_n-\beta_1b_1-\ldots-\beta_mb_m:$$

Այս արտահայտության ձախ մասը պատկանում է L_1-ին, իսկ աջը՝ L_2-ին, ուստի երկու մասերում էլ գրված է $L_1\cap L_2$-ի միևնույն տարրը: Այդ տարրի ներկայացումը $e_1,\ldots,e_n$ բազիսում միակն է, այն միակն է նաև $e_1,\ldots,e_n,b_1,\ldots,b_m$ բազիսում: Բայց $e_1,\ldots,e_n$ բազիսում ներկայացումը նաև հանդիսանում է $e_1,\ldots,e_n,b_1,\ldots,b_m$ բազիսում ներկայացում, ուստի

$$-\lambda_1e_1-\ldots-\lambda_ne_n-\beta_1b_1-\ldots-\beta_mb_m$$

գծային կոմբինացիայում բոլոր β_i գործակիցները զրոյական են և

$$\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_ka_k = -\lambda_1e_1-\ldots-\lambda_ne_n:$$

Այստեղից հետևում է

$$\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_ka_k+\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n = 0$$

և քանի որ $e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k$-ը բազիս է L_1-ի համար, ապա $\alpha_i = 0$ և $\lambda_j = 0$: Այսպիսով ապացուցեցինք, որ

$$e_1,\ldots,e_n,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m\text{-ը}$$

$L_1 + L_2$-ի բազիսն է և թեորեմն ապացուցվեց:

Թեորեմ 2-ից հետևում է, որ երբ $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$ (սա համարժեք է $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ պայմանին) $L_1 + L_2$-ի բազիսը ստացվում է L_1-ի բազիսին L_2 բազիսի կցագրմամբ և

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2):$$

Այդ դեպքում ասում են, որ $L_1 + L_2$ գումարն **ուղիղ** է և օգտվում են $L_1 \dotplus L_2$ նշանակումից:

Նկատենք, որ ուղիղ գումարի դեպքում, գումարի տարրի ներկայացումը L_1 և L_2 ենթատարածությունների տարրերի գումարի տեսքով միակն է: Իսկապես,

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \Rightarrow a_1 - a_2 = b_2 - b_1$$

ու հավասարման երկու մասերն էլ պատկանում են $L_1 \cap L_2$-ին, ուստի դրանք զրոյական են:

Ֆակտոր-տարածություն

Դիցուք M-ը L գծային տարածության ենթատարածությունն է:

Սահմանում: $x+M=\{x+m \mid m\in M\}$ բազմությունը կոչվում է հարակից դաս ըստ M ենթաբազմության:

Քանի որ $0\in M$, ապա $x\in x+M$:

Հարակից դասերի հիմնական հատկություններն են.

1. $x+M=y+M \Leftrightarrow x-y\in M$
2. $(x+M)\cap(y+M)\neq\varnothing \Rightarrow x+M=y+M$

Ապացուցենք առաջին հատկությունը: Եթե $x+M=y+M$, ապա $x\in y+M$, $x=y+m$ և $x-y=m\in M$: (Քանի որ M-ը գծային ենթատարածություն է, ապա $x-y\in M \Leftrightarrow y-x\in M$, և $x-y\in M$ և $y-x\in M$ պայմանները կամ բավարարված են միաժամանակ կամ էլ միաժամանակ չեն բավարարված:) Եթե այժմ $x-y\in M$, ապա $x-y=\tilde{m}\in M$ և $x=y+\tilde{m}$: Վերցնենք կամայական տարր $x+M$ դասից՝ $x+m=y+(\tilde{m}+m)\in y+M$: Ուստի՝ $x+M\subseteq y+M$: Մյուս կողմից՝ $y=x-\tilde{m}$ և $y+m=x+(-\tilde{m}+m)\in x+M$: Ուստի՝ $y+M\subseteq x+M$ և առաջին հատկությունը ապացուցված է: Մասնավորապես ստանում ենք, որ $x+M=M \Leftrightarrow x\in M$:

Ստուգենք երկրորդ հատկությունը: Դիցուք $z\in(x+M)\cap(y+M)$: Ունենք, որ $z=x+m_1$ և $z=y+m_2$: Ուրեմն՝ $x+m_1=y+m_2$ և $x-y=m_2-m_1\in M$: Համաձայն առաջին հատկության՝

$$x+M=y+M:$$

Այսպիսով ստանում ենք, որ L գծային տարածությունը տրոհված է հարակից դասերի ըստ M ենթատարածության: Յուրաքանչյուր տարր պատկանում է հարակից դասի ($x \in x+M$) և տարբեր դասերը չեն հատվում, ուստի L-ը չհատվող հարակից դասերի միավորում է: Նկատենք նաև, որ յուրաքանչյուր հարակից դաս կարելի է $1-1$ համապատասխանության մեջ դնել M-ի հետ: Իսկապես $m \in L$ համապատասխանեցնենք $x+m$ տարրին $x+M$ դասից: Քանի որ $x+m_1 = x+m_2$ պայմանից բխում է $m_1 = m_2$, ապա դա $1-1$ համապատասխանություն է:

Նշանակենք L/M-ով ըստ M-ի բոլոր հարակից դասերի բազմությունը: Սահմանենք $x+M$ և $y+M$ հարակից դասերի գումարը որպես $(x+y)+M$: Այս սահմանումը կոռեկտ է: Իսկապես, եթե $x+M = x_1+M$ և $y+M = y_1+M$, ապա ըստ սահմանման

$$(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$$

և

$$(x_1+M)+(y_1+M) = (x_1+y_1)+M:$$

Ունենք, որ $x-x_1 \in M$ և $y-y_1 \in M$, ուստի

$$(x+y)-(x_1+y_1) = (x-x_1)+(y-y_1) \in M$$

և

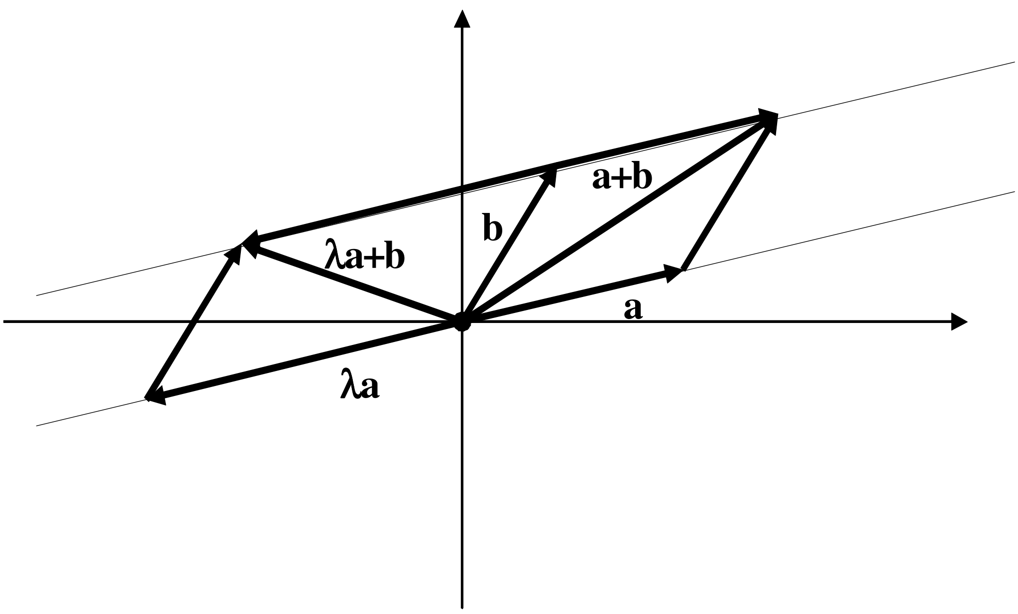
$$(x+y)+M = (x_1+y_1)+M:$$

Սահմանենք $x+M$ հարակից դասի λ թվով բազմապատկումը որպես $\lambda x+M$: Այս սահմանումը նույնպես կոռեկտ է: Եթե $x_1 \in x+M$, ապա $x-x_1 \in M$ և $\lambda x-\lambda x_1 = \lambda(x-x_1) \in M$: Դյուրին է ստուգել, որ L/M-ը սահմանված գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններով բավարարում է գծային տարածության սահմանմանը: Այսուհետև L/M-ը կանվանենք **ֆակտոր-տարածություն** M-ի նկատմամբ:

Օրինակներ

1. Դիտարկենք հարթության մեջ գտնվող վեկտորների

բազմությունը, որը գծային տարածություն է վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ։ Ֆիքսած $\mathbf{a}$ վեկտորին կոլինեար վեկտորների բազմությունը կազմում է ենթատարածություն։ $\mathbf{b}$ և $\mathbf{c}$ վեկտորները կպատկանեն միևնույն հարակից դասին ըստ $\mathbf{a}$-ին կոլինեար վեկտորների ենթատարածության միայն և միայն եթե $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ վեկտորը լինի կոլինեար $\mathbf{a}$-ին։ Այսինքն, հարակից դասը, որ ծնված է $\mathbf{b}$ վեկտորով դա հետևյալ բազմությունն է $\{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$։ $\mathbf{a}$-ին կոլինեար բոլոր վեկտորները, որոնց սկզբնակետը կոորդինատային համակարգի սկիզբն է, գտնվում են միևնույն ուղղի վրա, որն անցնում է 0 կետով։ Ստորև բերված նկարից երևում է, որ $\{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ բազմության բոլոր վեկտորների ծայրակետերն ընկած են միևնույն ուղղի վրա, որը զուգահեռ է $\mathbf{a}$-ով որոշված ուղղին։ Պարզ է, որ կամայական վեկտոր, որի սկզբնակետը 0-ն է, իսկ ծայրակետն ընկած է նշված ուղղի վրա պատկանում է $\{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ բազմությանը։ Ուստի ըստ $\mathbf{a}$-ին կոլինեար վեկտորների ենթատարածության հարակից դասերը միարժեքորեն որոշվում են $\mathbf{a}$-ին զուգահեռ ուղիղներով՝ յուրաքանչյուր ուղղին համապատասխանում է մեկ հարակից դաս։



2. Դիցուք տրված է n անհայտով m գծային հավասարումների *համասեռ համակարգը՝*

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Դրա լուծումները $V_n(\mathbb{R})$ տարածության վեկտորներն են: Դյուրին է ստուգել , որ եթե $(x_1, \ldots, x_n)$ վեկտորը համակարգի լուծում է, ապա $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ վեկտորը նույնպես լուծում է: Համասեռ համակարգի երկու լուծումների գումարը նորից լուծում է: Այսինքն համասեռ համակարգի լուծումների բազմությունը կազմում է ենթատարածություն $V_n(\mathbb{R})$-ում: Ֆիքսենք որևէ վեկտոր $V_n(\mathbb{R})$-ում $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$: Պարզ է, որ ըստ վերը նշված համակարգի լուծումների ենթատարածության հարակից դասի տարրերը կունենան հետևյալ տեսքը՝ $(x_1 + \mu_1, \ldots, x_n + \mu_n)$ և կբավարարեն հետևյալ (ընդհանուր դեպքում ոչ համասեռ) համակարգին

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

որտեղ $\beta_i = \alpha_{i1}\mu_1 + \ldots + \alpha_{in}\mu_n$, $i = 1, 2, \ldots, m$: *Այսինքն, հարակից դասը համընկնում է վերջին համակարգի լուծումների բազմության հետ:*

3. *Դիցուք $\mathbb{R}[x]$-ը իրական գործակիցներով բոլոր բազմանդամների գծային տարածությունն է, իսկ M-ը $x^2 + 1$ բազմանդամի պատիկների բազմությունն է $M = \{(x^2 + 1)h(x) \mid h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$: Դյուրին է համոզվել, որ M-ը գծային ենթատարածություն է $\mathbb{R}[x]$-ում: Երկու բազմանդամ կլինեն միևնույն հարակից դասից ըստ M-ի միայն և միայն այն դեպքում, երբ դրանց տարբերությունը պատկանում է M-ին, այսինքն $f(x) - g(x) = (x^2 + 1)h(x)$: Սա* նշանակում է, որ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները x^2+1 բազմանդամի վրա բաժանելիս կստանանք միևնույն մնացորդը, որն ունի $a+bx$ տեսքը: Ուստի, յուրաքանչյուր Հարակից դաս ըստ M-ի միարժեքորեն որոշվում է այն միակ $a+bx$ տեսքի բազմանդամով, որն ընկած է այդ Հարակից դասի մեջ:

Թեորեմ 4.

L գծային տարածության M ենթատարածության Համար տեղի ունի

$$\dim(L/M) = \dim(L) - \dim(M)$$

Ապացույց. Դիցուք $e_1,\ldots,e_n$-ը M ենթատարածության բազիս է: Համաձայն թեորեմ 2-ի այդ բազիսը կարող ենք ընդլայնել մինչև L-ի բազիսը՝ $e_1,\ldots,e_n,d_1,\ldots,d_k$: Եթե կառուցենք k տարրանոց բազիս L/M-ի Համար, թեորեմն ապացուցված կլինի: Դիտարկենք որպես L/M-ի բազիսի թեկնածու Հետևյալ Հարակից դասերի Համակարգը՝

$$(d_1+M),\ldots,(d_k+M):$$

Ստուգենք, որ այս Համակարգի գծային թաղանթը Համընկնում է L/M-ի Հետ: Եթե $x+M$-ը կամայական դաս է L/M-ից, ապա

$$x = \lambda_1 e_1 +\ldots+\lambda_n e_n + \mu_1 d_1 +\ldots+\mu_k d_k$$

քանի որ $e_1,\ldots,e_n,d_1,\ldots,d_k$-ն բազիս է L-ում: Այստեղից ստանում ենք, որ

$$x-(\mu_1 d_1 +\ldots+\mu_k d_k) = \lambda_1 e_1 +\ldots+\lambda_n e_n \in M:$$

Սա նշանակում է, որ

$$x+M = (\mu_1 d_1 +\ldots+\mu_k d_k)+M = \mu_1(d_1+M)+\ldots+\mu_k(d_k+M):$$

Այժմ ստուգենք, որ $(d_1+M),\ldots,(d_k+M)$ Համակարգը գծորեն *անկախ է: Դիցուք՝*

$$\mu_1(d_1 + M) + \ldots + \mu_k(d_k + M) = 0 + M:$$

Հետևաբար, $\mu_1 d_1 + \ldots + \mu_k d_k \in M$ *և կգտնվեն այնպիսի* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *որ*

$$\mu_1 d_1 + \ldots + \mu_k d_k = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n:$$

Վերջին հավասարությունը կարտագրենք որպես

$$\mu_1 d_1 + \ldots + \mu_k d_k - \lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_n e_n = 0$$

և օգտվելով $e_1, \ldots, e_n, d_1, \ldots, d_k$ *բազիսի հատկություններից կստանանք՝*

$$\mu_1 = \ldots = \mu_k = \lambda_1 \ldots = \lambda_n = 0,$$

այսինքն, $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$ *և համակարգի գծորեն անկախությունն ապացուցված է: Ապացուցված է նաև թեորեմը:*

n-չափանի տարածությունների իզոմորֆիզմը

Դիցուք L-ը n-չափանի գծային տարածություն է K դաշտի նկատմամբ: Ընտրենք մի որևէ բազիս

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}:$$

Ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր տարր $x \in L$ միարժեքորեն ներկայացվում է այդ բազիսում $x = \Lambda\mathcal{E}$: Ճիշտ է նաև հակառակը՝ բազիսային տարրերի կամայական գծային կոմբինացիան տալիս է մի տարր L-ում: Այսպիսով, ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանեցում L-ի և

$$V_n(K) \equiv \left\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in K,\ i = 1, \ldots, n\right\}\text{-ի}$$

միջև՝

$$x \in L \leftrightarrow \Lambda \in V_n(K)$$

Դյուրին է ստուգել, որ եթե $x \leftrightarrow \Lambda$ և $y \leftrightarrow \Gamma$ ապա $x + y \leftrightarrow \Lambda + \Gamma$ և $\alpha x \leftrightarrow \alpha\Lambda$: Այսինքն, L-ը և $V_n(K)$-ն որպես գծային տարածություններ իրարից չեն տարբերվում: Այդպիսի գծային տարածությունները կոչվում են **իզոմորֆ**:

Ամեն մի n-չափանի գծային տարածություն K դաշտի նկատմամբ իզոմորֆ է n-չափանի թվային վեկտորական տարածությանը:

Գծային օպերատորներ

Դիցուք L_1-ը և L_2-ը գծային տարածություններ են միևնույն K դաշտի նկատմամբ: $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$ արտապատկերումը կոչվում է **գծային օպերատոր**, եթե

$$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$$
$$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$$

Վերջին երկու պայմանները կարելի է փոխարինել մեկ համարժեքով. $\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{A}x + \mu \mathcal{A}y$:

Օրինակներ

1. $L_1 = L_2$ հարթության վեկտորների գծային տարածությունն է. օպերատորը ամեն մի վեկտորը բազմապատկում է λ թվով:

2. $L_1 = L_2$ հարթության վեկտորների գծային տարածությունն է. օպերատորը ամեն մի վեկտորը պտտում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետի շուրջ α անկյունով:

3. $L_1 = R_n[x]$ - իրական գործակիցներով n-ից փոքր կամ հավասար աստիճանի բազմանդամների բազմությունը, $L_2 = R_{n-1}[x]$: $\mathcal{A} = \dfrac{d}{dx}$ - ածանցման գործողությունն է:

4. $L_1 = R_n[x]$, $L_2 = R_{n+1}[x]$, օպերատորը ինտեգրման գործողությունն է:

5. $L_1 = V_n(K)$, $L_2 = V_m(K)$, A-ն $n \times m$-չափանի մատրից է, որի տարրերը K-ից են.

$$\mathcal{A}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A \in V_m(K)$$

արտապատկերումը գծային օպերատոր է:

Գծային օպերատորի միջուկը և պատկերը

Յուրաքանչյուր $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$ գծային օպերատորի հետ կապվում են երկու ենթատարածություններ՝ միջուկը և պատկերը համապատասխանաբար L_1-ում և L_2-ում:

Գծային օպերատորի միջուկը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $\ker \mathcal{A} = \{x \in L_1 \mid \mathcal{A}x = 0\}$:

Գծային օպերատորի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ $\mathcal{A}0 = 0$ և միջուկը երբեք դատարկ չէ: Միջուկը ենթատարածություն է L_1-ում: $x, y \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{A}y = 0$ և

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \mathcal{A}(\lambda x) + \mathcal{A}(\mu y) = \lambda \mathcal{A}x + \mu \mathcal{A}y =$$

$$\lambda 0 + \mu 0 = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \ker \mathcal{A}:$$

Պատկերը սահմանվում է որպես՝

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{y \in L_2 \mid \exists x \in L_1, \mathcal{A}x = y\}$$

և այն հանդիսանում է ենթատարածություն L_2-ում: Իսկապես, եթե $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, ապա $\exists x_1, x_2$ $\mathcal{A}x_1 = y_1$, $\mathcal{A}x_2 = y_2$, ուստի

$$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A}x_1 + \mu \mathcal{A}x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$$

և $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$:

Այսուհետ, երբ հարմար կգտնենք, կհամարենք, որ $L_2 = \operatorname{Im} \mathcal{A}$:

Դյուրին է ստուգել, որ

$$\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 - x_2 \in \ker \mathcal{A} \Leftrightarrow x_1 + \ker \mathcal{A} = x_2 + \ker \mathcal{A}$$

(այսինքն, x_1-ը և x_2-ը միևնույն հարակից դասից են ըստ միջուկի): Ուրեմն, $\mathcal{A}$ գծային օպերատորը միևնույն հարակից դասի (ըստ միջուկի) տարրերը տանում է պատկերի նույն տարրի մեջ, իսկ տարբեր

Հարակից դասերի տարրերը անցնում են տարբեր տարրերի մեջ: Այսպիսով, ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանում $L_1/\ker\mathcal{A}$ ֆակտոր-տարածության և $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ միջև, որն իզոմորֆիզմ է (դա բխում է օպերատորի գծայնությունից): Իրոք, նշանակենք $\mathcal{B}$-ով հետևյալ արտապատկերումը $L_1/\ker\mathcal{A}$-ից $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ի վրա

$$\mathcal{B}(x+\ker\mathcal{A}) = \mathcal{A}x$$

Այս $\mathcal{B}$ օպերատորը պարզ է, որ փոխմիարժեքորեն արտապատկերում է $L_1/\ker\mathcal{A}$-ն $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ի վրա: Այն գծային օպերատոր է.

$$\mathcal{B}(\lambda(x+\ker\mathcal{A})+\mu(y+\ker\mathcal{A})) = \mathcal{B}((\lambda x+\ker\mathcal{A})+(\mu y+\ker\mathcal{A})) =$$

$$\mathcal{B}(((\lambda x+\mu y)+\ker\mathcal{A})) = \mathcal{A}(\lambda x+\mu y) = \lambda\mathcal{A}x+\mu\mathcal{A}y =$$

$$\lambda\mathcal{B}(x+\ker\mathcal{A})+\mu\mathcal{B}(y+\ker\mathcal{A}):$$

Ուստի՝ $L_1/\ker\mathcal{A}$-ն իզոմորֆ է $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ն:

Թեորեմ 5.

Դիցուք $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ գծային օպերատոր է: $L_1/\ker\mathcal{A}$ ֆակտոր-տարածությունը իզոմորֆ է $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ պատկերին:

Թեորեմ 6.

$\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ գծային օպերատորի համար ստույգ է՝

$$\dim\ker\mathcal{A}+\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim L_1$$

Ապացույց. Քանի որ $L_1/\ker\mathcal{A}$ իզոմորֆ է $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ին, ապա

$$\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim L_1/\ker\mathcal{A} = \dim L_1 - \dim\ker\mathcal{A}$$

համաձայն Թեորեմ 4-ի:

Դժվար չէ նկատել, որ գծային օպերատորը կլինի փոխմիարժեք *միայն այն դեպքում, երբ միջուկը բաղկացած է մեկ տարրից՝ զրոյից և, ուստի,* $\dim\ker\mathcal{A}=0$*։*

Դ*իցուք* $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ *գծային օպերատոր է։* ***Ը****նտրենք բազիս* L_1*-ում* $\{e_1,\ldots,e_n\}$*։* ***Կ****իրառենք օպերատորը բազիսային տարրերին՝* $\{\mathcal{A}e_1,\ldots,\mathcal{A}e_n\}$*։* ***Ա****կնհայտ է, որ ստացված համակարգի գծային թաղանթը համընկնում է պատկերի հետ։* ***Ի****սկապես, եթե* $y \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$*, ապա* $\exists x \in L_1$ *որ* $\mathcal{A}x = y$*։* x*-ի բազիսային ներկայացումից* $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ *հեշտությամբ կստանանք* y*-ի ներկայացումը* $y = \lambda_1\mathcal{A}e_1 + \ldots + \lambda_n\mathcal{A}e_n$*։* ***Պ****արզ է նաև, որ գծային օպերատորը միարժեքորեն որոշվում է* $\{\mathcal{A}e_1,\ldots,\mathcal{A}e_n\}$ *համակարգով։* ***Ի****րոք, եթե* $\{e_1,\ldots,e_n\}$*-ը բազիս է և հայտնի են* $\mathcal{A}e_1,\ldots,\mathcal{A}e_n$*-ը, ապա* $\forall x \in L_1$ *համար* $\mathcal{A}x$*-ի արժեքը պետք է լինի՝* $\lambda_1\mathcal{A}e_1 + \ldots + \lambda_n\mathcal{A}e_n$*, որտեղ* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$*-ը* x*-ի բազիսային կոորդինատներն են։* ***Ն****կատենք, որ* $\mathcal{A}e_1,\ldots,\mathcal{A}e_n$*-ի արժեքները իրարից անկախ են և կարող են ընդունել կամայական արժեքներ* L_2*-ից։*

Գծային օպերատորի ներկայացումը մատրիցով

Դիցուք $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$ գծային օպերատոր է և $\dim L_1 = n$, $\dim L_2 = m$: Արդեն գիտենք, որ L_1-ը իզոմորֆ է $V_n(K)$-ին, իսկ L_2-ը՝ $V_m(K)$-ին: Եթե L_1-ում ֆիքսված է $\mathcal{E}_1$ բազիսը, իսկ L_2-ում համապատասխանաբար $\mathcal{E}_2$-ը, ապա L_1 և L_2 տարածությունների և $V_n(K)$ ու $V_m(K)$ վեկտորական տարածությունների միջև համապատասխանաբար հաստատվում են փոխմիարժեք արտապատկերումներ, որոնք իրականացնում են վերը նշված իզոմորֆիզմները:

Ստացվում է հետևյալ դիագրամը.

$$
\begin{array}{cccc}
\mathcal{A} : & L_1 & \to & L_2 \\
& \mathcal{E}_1 \updownarrow & & \mathcal{E}_2 \updownarrow \\
? : & V_n(K) & \to & V_m(K)
\end{array}
$$

Փորձենք այժմ կառուցել մի այնպիսի գծային օպերատոր $? : V_n(K) \to V_m(K)$, որը կդարձնի կոմուտատիվ վերը նշված դիագրամը, այսինքն, եթե $x \in L_1$ տարրից սկսենք և շարժվենք դիագրամի սլաքներով, ապա անկախ ընտրած ճանապարհից միշտ կհանենք $\mathcal{A}x$-ին:

Դիցուք x-ի ներկայացումը $\mathcal{E}_1$ բազիսում հետևյալն է՝ $x = \Lambda\mathcal{E}_1$: Հաշվենք $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\Lambda\mathcal{E}_1) = \Lambda\mathcal{A}\mathcal{E}_1$: Արտահայտենք $\mathcal{A}\mathcal{E}_1$-ը $\mathcal{E}_2$ բազիսում: Ամեն մի $i = 1, \ldots, n$ համար ներկայացնենք $\mathcal{E}_2$ բազիսում $\mathcal{A}e_i$-ն՝ $\mathcal{A}e_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im})\mathcal{E}_2$: Կազմենք A մատրիցը հետևյալ կերպ՝

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}:$$

Պարզ է, որ $\mathcal{A}\mathcal{E}_1 = A\mathcal{E}_2$ *և* $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\Lambda\mathcal{E}_1) = \Lambda\mathcal{A}\mathcal{E}_1 = \Lambda(A\mathcal{E}_2) = (\Lambda A)\mathcal{E}_2$*:*

Այժմ պահանջվող անհայտ $? : V_n(K) \to V_m(K)$ *օպերատորը կարելի է կառուցել* A *մատրիցի միջոցով*

$$\begin{array}{lcccc} \mathcal{A}: & L_1 & \rightarrow & L_2 \\ & \mathcal{E}_1 \ \updownarrow & & \mathcal{E}_2 \ \updownarrow \\ A: & V_n(K) & \rightarrow & V_m(K) \end{array}$$

Իսկապես, $\mathcal{A}x$*-ը ստանալու համար վերցնենք* x*-ի ներկայացումը* $\mathcal{E}_1$ *բազիսում* $\Lambda\mathcal{E}_1$*, հետո կիրառենք* Λ*-ին* A *մատրիցով որոշվող օպերատորը և կստանանք* ΛA *վեկտորը, որը* $\mathcal{E}_2$ *բազիսում* $\mathcal{A}x$*-ի կոորդինատային վեկտորն է՝* $(\Lambda A)\mathcal{E}_2 = \mathcal{A}x$*: Այսպիսով տեսնում ենք, որ դիագրամը կոմուտատիվ է:*

A *մատրիցը կոչվում է* $\mathcal{A}$ *գծային օպերատորի* ***ներկայացում*** $\mathcal{E}_1$ *և* $\mathcal{E}_2$ *բազիսներում և օպերատորը* ***ներկայացված*** *է* A *մատրիցով, եթե* $\mathcal{A}\mathcal{E}_1 = A\mathcal{E}_2$ *:*

Դժվար չէ նկատել, որ A *մատրիցի տեսքը կախված է ընտրված* $\mathcal{E}_1$ *և* $\mathcal{E}_2$ *բազիսներից: Պարզենք, թե ինչպես կփոխվի մատրիցը, եթե ընտրենք այլ բազիսներ: Դիցուք* T_1*-ը և* T_2*-ը նոր բազիսներին անցման մատրիցներն են՝* $\mathcal{E}_1 = T_1\mathcal{D}_1$ *և* $\mathcal{E}_2 = T_2\mathcal{D}_2$*: Ստանում ենք՝*

$$\mathcal{A}\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}(T_1^{-1}\mathcal{E}_1) = T_1^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{E}_1) =$$

$$T_1^{-1}(A\mathcal{E}_2) = T_1^{-1}(AT_2\mathcal{D}_2) = (T_1^{-1}AT_2)\mathcal{D}_2,$$

ուրեմն $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումը $\mathcal{D}_1$ և $\mathcal{D}_2$ բազիսներում $T_1^{-1}AT_2$ մատրիցն է (այդ մատրիցը կոչվում է A մատրիցին **նման** մատրից)։ Այն դեպքում, երբ $L_1 = L_2$ կարող ենք վերցնել $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ և կստանանք $T_1 = T_2 = T$։ Նոր բազիսում A մատրիցը կվերածվի $T^{-1}AT$ մատրիցի, որը կոչվում է A մատրիցին **համալուծ**։

Գծային հանրահաշվի կարևորագույն խնդիրներից մեկը այնպիսի բազիս կառուցելու խնդիրն է, որում տրված գծային օպերատորի մատրիցն ունի "պարզագույն" տեսքը։

Գծային օպերատորի ռանգը

Սահմանում: $A : L_1 \to L_2$ *գծային օպերատորի **ռանգ** է կոչվում պատկերի չափը և այն նշանակվում է հետևյալ կերպ՝* $rank A = \dim \operatorname{Im} A$*:*

Դիցուք $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$ *գծային օպերատորը ներկայացված է* A *մատրիցով, այսինքն կոմուտատիվ է հետևյալ դիագրամը.*

$$\begin{array}{lccc} \mathcal{A}: & L_1 & \to & L_2 \\ & \varepsilon_1 \updownarrow & & \varepsilon_2 \updownarrow \\ A: & V_n(K) & \to & V_m(K) \end{array}$$

Քանի *որ* L_2*-ը և* $V_m(K)$*-ն իզոմորֆ են, ապա* $\operatorname{Im}\mathcal{A}$*-ն իզոմորֆ է* $\operatorname{Im}A$*-ին և*

$$rank\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} A:$$

Հեշտ է տեսնել, որ $\operatorname{Im}A$*-ն դա* A *մատրիցի տողերի (որոնք դիտարկվում են որպես* $V_m(K)$*-ի տարրեր) համակարգի գծային թաղանթն է: Իսկապես,* $\operatorname{Im}A = \{\Lambda A \mid \Lambda \in V_n(K)\}$ *և, եթե* $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*,* ΛA*-ն հավասար է* A *մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիային, որի գործակիցներն են* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*: Ակնհայտ է, որ* $\dim \operatorname{Im}A$*-ն հավասար է* A *մատրիցի տողերի գծային թաղանթի չափին, որն իր հերթին հավասար է մատրիցի տողերի գծորեն անկախ առավելագույն համակարգի հզորությանը՝ մատրիցի ռանգին: Հետևաբար,*

$$rank\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} A = rank A$$

և գծային օպերատորի ռանգը համընկնում է նրան ներկայացնող մատրիցի ռանգի հետ:

Սիլվեստրի անհավասարությունները

Դիցուք տրված են երկու գծային օպերատորներ $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$ և $\mathcal{B} : L_2 \to L_3$ (նկատենք, որ բոլոր նշված տարածությունները սահմանված են միևնույն դաշտի նկատմամբ)։ Դիտարկենք մի նոր արտապատկերում, որ ստացվում է $\mathcal{A}$-ի և $\mathcal{B}$-ի հաջորդական կիրառմամբ։ Նշանակենք այդ օպերատորը $\mathcal{AB}$-ով, այսինքն $\mathcal{AB} : L_1 \to L_3$ և $(\mathcal{AB})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$։ Համոզվենք, որ $\mathcal{AB}$-ն նույնպես գծային օպերատոր է.

$$(\mathcal{AB})(\lambda x + \mu y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda x + \mu y)) \underbrace{=}_{\text{քանի որ } \mathcal{A}\text{-ն գծային է}}$$

$$\mathcal{B}(\lambda \mathcal{A}x + \mu \mathcal{A}y) \underbrace{=}_{\text{քանի որ } \mathcal{B}\text{-ն գծային է}} \lambda \mathcal{B}(\mathcal{A}x) + \mu \mathcal{B}(\mathcal{A}y) = \lambda(\mathcal{AB})x + \mu(\mathcal{AB})y\text{։}$$

Կառուցված $\mathcal{AB}$ գծային օպերատորը կոչվում է $\mathcal{A}$-ի և $\mathcal{B}$-ի արտադրյալ։

Դիցուք L_1-ում, L_2-ում և L_3-ում ընտրվել են բազիսներ և կառուցվել են $\mathcal{A}$-ի և $\mathcal{B}$-ի ներկայացումները A և B մատրիցներով համապատասխանաբար։ Ուրեմն կոմուտատիվ է հետևյալ դիագրամը.

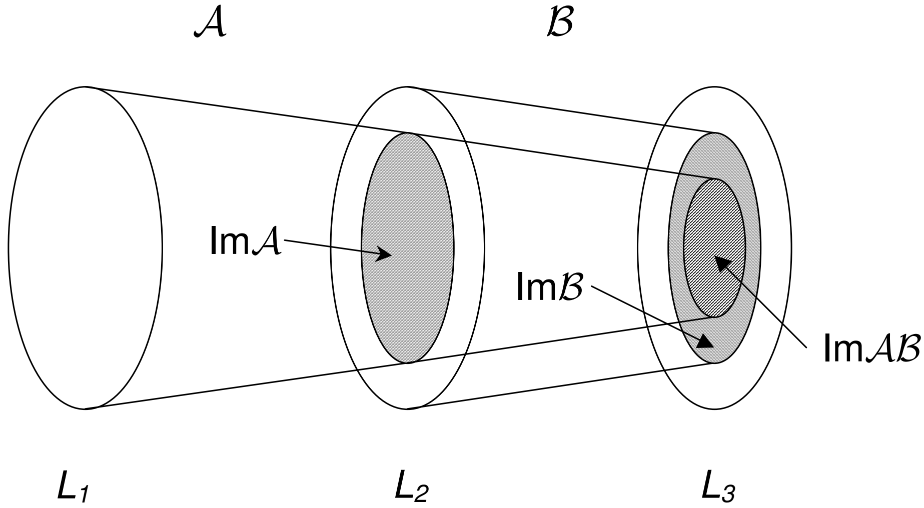
$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{A} & & \mathcal{B} & \\
L_1 & \to & L_2 & \to & L_3 \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
V_n(K) & \to & V_m(K) & \to & V_k(K) \\
 & A & & B &
\end{array}$$

Դժվար չէ նկատել, որ $\mathcal{AB}$ օպերատորը ներկայացվում է AB մատրիցով.

Եթե $x \in L_1$ և նրա կոորդինատային վեկտորն է $\Lambda \in V_n(K)$, ապա

$\Lambda(AB) = (\Lambda A)B$-ն $(\mathcal{AB})x$-ի կոորդինատային վեկտորն է $V_k(K)$-ում:

Այժմ փորձենք գնահատել $rank(\mathcal{AB})$-ի մեծությունը: Հաջորդաբար կիրառենք $\mathcal{A}$-ն ու $\mathcal{B}$-ն: Կստանանք հետևյալ պատկերը`



Տեսնենք որ, $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \subseteq L_2$, $\mathrm{Im}\,\mathcal{AB} \subseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{B} \subseteq L_3$: Նկատենք, որ Թեորեմ 6-ից հետևում է, որ գծային օպերատորի պատկերի չափը (այսինքն ռանգը) չի գերազանցում օպերատորի որոշման տիրույթ հանդիսացող տարածության չափին: Պարզ է, որ $\dim \mathrm{Im}\,\mathcal{AB} \le \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{B}$ և $rank(\mathcal{AB}) \le rank\mathcal{B}$: Նկարից երևում է (և դա հեշտությամբ ստուգվում է), որ $\mathcal{B}$ օպերատորի սահմանափակումը $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$-ի վրա նույնպես գծային օպերատոր է, որը $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$-ն տանում է $\mathrm{Im}\,\mathcal{AB}$-ի վրա, ուստի $\dim \mathrm{Im}\,\mathcal{AB} \le \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ և $rank(\mathcal{AB}) \le rank\mathcal{A}$:

Այսպիսով ստացանք ռանգի վերին գնահատականը.

$$\begin{aligned} rank(\mathcal{AB}) &\le rank\mathcal{A} \\ rank(\mathcal{AB}) &\le rank\mathcal{B} \end{aligned} \qquad (6)$$

Ստորին գնահատական ստանալու համար կառուցենք հետևյալ գծային օպերատորը.

$$\mathcal{B}^* \ : \ L_2/\operatorname{Im}\mathcal{A} \to \operatorname{Im}\mathcal{B}/\operatorname{Im}\mathcal{AB}$$

$$\mathcal{B}^*(x+\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \mathcal{B}x+\operatorname{Im}\mathcal{AB}, \text{ բոլոր } x \in L_2 \text{ համար:}$$

Համոզվենք, որ $\mathcal{B}^*$*-ն գծային օպերատոր է: Դիցուք* $(x_1+\operatorname{Im}\mathcal{A})$ *և* $(x_2+\operatorname{Im}\mathcal{A}) \in L_2/\operatorname{Im}\mathcal{A}$*:*

Ունենք

$$\mathcal{B}^*((x_1+\operatorname{Im}\mathcal{A})+(x_2+\operatorname{Im}\mathcal{A})) = \mathcal{B}^*((x_1+x_2)+\operatorname{Im}\mathcal{A}) =$$

$$\mathcal{B}(x_1+x_2)+\operatorname{Im}\mathcal{AB} = (\mathcal{B}x_1+\mathcal{B}x_2)+\operatorname{Im}\mathcal{AB} =$$

$$(\mathcal{B}x_1+\operatorname{Im}\mathcal{AB})+(\mathcal{B}x_2+\operatorname{Im}\mathcal{AB}) = \mathcal{B}^*(x_1+\operatorname{Im}\mathcal{A})+\mathcal{B}^*(x_2+\operatorname{Im}\mathcal{A}):$$

Նույնպես, եթե $(x+\operatorname{Im}\mathcal{A}) \in L_2/\operatorname{Im}\mathcal{A}$*, ապա*

$$\mathcal{B}^*(\lambda(x+\operatorname{Im}\mathcal{A})) = \mathcal{B}^*(\lambda x+\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\lambda x)+\operatorname{Im}\mathcal{AB} =$$

$$\lambda\mathcal{B}x+\operatorname{Im}\mathcal{AB} = \lambda(\mathcal{B}x+\operatorname{Im}\mathcal{AB}) = \lambda\mathcal{B}^*(x+\operatorname{Im}\mathcal{A}):$$

Ստուգենք այժմ, որ

$$\operatorname{Im}\mathcal{B}^* = \operatorname{Im}\mathcal{B}/\operatorname{Im}\mathcal{AB}:$$

Եթե $(y+\operatorname{Im}\mathcal{AB}) \in \operatorname{Im}\mathcal{B}/\operatorname{Im}\mathcal{AB}$*, ապա* $y \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$ *և* $\exists x \in L_2$ *որ* $\mathcal{B}x = y$*:*

Ստանում ենք՝

$$\mathcal{B}^*(x+\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \mathcal{B}x+\operatorname{Im}\mathcal{AB} = y+\operatorname{Im}\mathcal{AB}$$

և

$$y+\operatorname{Im}\mathcal{AB} \in \operatorname{Im}\mathcal{B}^*:$$

Քանի որ $\mathcal{B}^*$*-ն գծային օպերատոր է, ապա*

$$\dim(\operatorname{Im}\mathcal{B}/\operatorname{Im}\mathcal{AB}) \le \dim(L_2/\operatorname{Im}\mathcal{A})$$

և համաձայն Թեորեմ 4-ի ստանում ենք՝

$$\dim\operatorname{Im}\mathcal{B} - \dim\operatorname{Im}\mathcal{AB} \le \dim L_2 - \dim\operatorname{Im}\mathcal{A},$$

այսինքն՝

$$rank\mathcal{B} - rank(\mathcal{AB}) \le \dim L_2 - rank\mathcal{A}:$$

Ստացանք հետևյալ ստորին գնահատականը

$$rank\mathcal{A} + rank\mathcal{B} - \dim L_2 \le rank(\mathcal{AB}) \qquad (7)$$

Միավորելով (6) և (7) գնահատականները ստանում ենք՝

Թեորեմ 7. (Սիլվեստրի անհավասարությունները)

$$rank(\mathcal{AB}) \le rank\mathcal{A}$$

$$rank(\mathcal{AB}) \le rank\mathcal{B}$$

$$rank\mathcal{A} + rank\mathcal{B} - \dim L_2 \le rank(\mathcal{AB})$$

Եթե $\mathcal{A}$ և $\mathcal{B}$ օպերատորները ներկայացված են $n \times m$ և $m \times k$ չափանի A և B մատրիցներով, համապատասխանաբար (ինչպես նշել էինք վերը), ապա Սիլվեստրի անհավասարությունները մատրիցների համար կունենան հետևյալ տեսքը.

$$rank(AB) \le rankA$$

$$rank(AB) \le rankB$$

$$rankA + rankB - m \le rank(AB)$$

Եթե A մատրիցը չվերասերված է, ապա $n = m = rankA$ և

$$rankA + rankB - m = rankB \le rank(AB) \le rankB,$$

ուստի՝

$$rank(AB) = rankB:$$

Եթե B մատրիցը չվերասերված է, ապա $m = k = rankB$ և

$$rankA + rankB - m = rankA \le rank(AB) \le rankA$$

հետևաբար՝

$$rank(AB) = rankA:$$

Թեորեմ 8.

Չվերասերված մատրիցով բազմապատկելիս մատրիցը չի փոխում իր ռանգը:

Ինչպես տեսել էինք, տարբեր բազիսներում միևնույն օպերատորի մատրիցային ներկայացումները իրար հետ կապված են հետևյալ կերպ՝ $T_1^{-1}AT_2$: Քանի որ A-ն և $T_1^{-1}AT_2$-ն միևնույն օպերատորի ներկայացումներն են, ապա դրանց ռանգերը համընկնում են: Դա նույնպես հաստատվում է Թեորեմ 8-ով, որովհետև T_1-ը և T_2-ը անցման մատրիցներ են և, ուրեմն, չվերասերված են:

Գծային հավասարումների համակարգեր

Դիցուք K դաշտում տրված է n անհայտով m հատ գծային հավասարումների համակարգ

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1 \\ \alpha_{21}x_1+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m \end{array}\right. \tag{8}$$

Լուծել համակարգը նշանակում է գտնել բոլոր լուծումները, եթե համակարգն ունի լուծում: Հեշտ է տեսնել, որ (8) համակարգը կարելի է ներկայացնել մատրիցային լեզվով: Եթե նշանակենք $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ և

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & & \alpha_{m2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

ապա համակարգը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$xA=\beta \tag{9}$$

Ինչպես գիտենք, xA-ն իրենից ներկայացնում է A մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիա, որի գործակիցները $x_1,\ldots,x_n$-են: Սրեւմն, (9) համակարգն ունի լուծում միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\beta\in \mathrm{Im}A$, եթե A մատրիցը դիտարկենք որպես գծային օպերատոր, որ գործում է $V_n(K)$-ի վրա և արժեքներ է ընդունում $V_m(K)$-ում: Որպեսզի ստուգենք $\beta\in \mathrm{Im}A$ պայմանը, կառուցենք այսպես կոչված ընդլայնված մատրիցը՝

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{pmatrix}:$$

Ակնհայտ է, որ վերջին տողը կլինի գծորեն անկախ մնացածից միայն, երբ $rankA < rank\tilde{A}$*: Հակառակ դեպքում, երբ* $rankA = rank\tilde{A}$, *վերջին տողը կարտահայտվի գծորեն մնացածով և* $\beta \in \mathrm{Im}A$*:*

Թեորեմ9. (Կրոնեկեր-Կապելլի)

Որպեսզի $xA = \beta$ ***համակարգն ունենա լուծում (լինի համատեղ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ*** $rankA = rank\tilde{A}$***:***

Ֆիքսած $\beta \in \mathrm{Im}A$ *համար* (9) *համակարգի լուծումները կազմում են հարակից դաս* $V_n(K)$*-ում ըստ* $\ker A$*-ի, ուստի* (9) *համակարգն ունի միակ լուծում միայն և միայն այն դեպքում, երբ հարակից դասերը կազմված են մեկ տարրից, այսինքն երբ* $\dim\ker A = 0$, *ինչը համարժեք է* $\ker A = \{0\}$ *պայմանին:*

$xA = 0$ *համակարգը կոչվում է* $xA = \beta$*-ին համապատասխանող համասեռ համակարգ: Ակնհայտ է, որ* $xA = 0$ *համասեռ համակարգի լուծումները* $\ker A$*-ի տարրերն են: Սրեմն, որպեսզի ստանանք* (9) *համակարգի բոլոր լուծումները բավական է գտնել համասեռ համակարգի լուծումները (այսինքն գտնել միջուկի* $\ker A$*-ի որևէ բազիս, քանի որ* $\dim\ker A = n - rankA$ *բավական է գտնել համասեռ համակարգի* $n - rankA$ *հատ անկախ լուծում) և գտնել* (9) *համակարգի որևէ մեկ մասնավոր լուծում: Համակարգի բոլոր լուծումների հարակից դասը ստանալու համար բավական կլինի մասնավոր լուծմանը գումարել հերթով համասեռ համակարգի բոլոր լուծումները (միջուկի* *բազիսի բոլոր գծային կոմբինացիաները):*

$xA = 0$ ***համասեռ համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում միայն երբ*** $n - rankA \neq 0$***, ինչը համարժեք է*** $< n$ ***պայմանին: Եթե*** A ***մատրիցը քառակուսի է, վերջին պայմանը համարժեք է*** $\det A = 0$ ***պայմանին:***

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Գաուսի ալգորիթմը

Տրված է n անհայտով m գծային հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Գաուսի ալգորիթմը բաղկացած է երկու փուլից՝ "ուղիղ փուլից" և "հետադարձ փուլից":

Ուղիղ փուլ (համակարգի բերումը սեղանաձև տեսքի)

Դյուրին է ստուգել, որ եթե համակարգի որևէ հավասարում բազմապատկենք թվով և գումարենք այն մեկ այլ հավասարմանը, ապա ստացված համակարգը կլինի համարժեք սկզբնականին:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $\alpha_{11} \neq 0$: Իրոք, եթե $\alpha_{11} = 0$, ապա կգտնվի $\alpha_{1i} \neq 0$, $i = 2,\ldots,n$: Հակառակ դեպքում առաջին հավասարման ձախ մասը նույնաբար զրո է և առաջին հավասարումը կամ անէական է (այն ունի $0 = 0$ տեսքը) կամ համակարգն անհամատեղ է (առաջին հավասարումը $0 = \beta_1 \neq 0$ տեսքի է): Վերանվանելով x_1 և x_i անհայտները համակարգի առաջին և i-րդ սյուները, կտեղափոխենք և նոր համակարգում կունենանք՝ $\alpha_{11} \neq 0$: Պարզ է, որ նոր համակարգի լուծումը հեշտությամբ կվերածվի սկզբնական համակարգի լուծմանը:

Այսպիսով համարում ենք, որ $\alpha_{11} \neq 0$: Յուրաքանչյուր $i \in \{2,\ldots,n\}$ համար բազմապատկենք առաջին հավասարումը $\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}$ -ով և գումարենք i-րդ հավասարմանը: Դյուրին է ստուգել, որ i-րդ հավասարման x_1-ի գործակիցը կզրոյացվի: Այսինքն, համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad \acute{\alpha}_{22}x_2 + \ldots + \acute{\alpha}_{2n}x_n = \acute{\beta}_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad \acute{\alpha}_{m2}x_2 + \ldots + \acute{\alpha}_{mn}x_n = \acute{\beta}_m \end{cases}$$

Եթե որևէ հավասարման ձախ մասը զրոյացվել է, իսկ աջը ոչ, ապա համակարգն անհամատեղ է և ալգորիթմը վերջացնում է աշխատանքը: Եթե կան հավասարումներ, որ ձախ մասը զրո է և աջ մասն էլ է զրո, ապա այդպիսի բոլոր հավասարումներն անէական են և ստացվում են առաջին հավասարումից թվով բազմապատկմամբ: Այդ հավասարումները հեռացվում են համակարգից:

Ինչպես նշել էինք վերը, կարող ենք ենթադրել, որ $\acute{\alpha}_{22} \neq 0$ (անհրաժեշտության դեպքում կվերանվանենք որոշ անհայտները) և բազմապատկելով երկրորդ հավասարումը $\frac{\acute{\alpha}_{i2}}{\acute{\alpha}_{22}}$ գործակցով հանենք այն i-րդ հավասարումից, $i = 3,\ldots,n$: Արդյունքում բոլոր հավասարումներում, սկսած երրորդից, x_2-ի գործակիցը կզրոյանա: Շարունակելով պրոցեսը կամ կպարզվի, որ համակարգն անհամատեղ է և ալգորիթմը կվերջացնի աշխատանքը, կամ էլ համակարգը "ուղիղ փուլի" ընթացքում կբերվի հետևյալ սեղանաձև տեսքի.

$$
\left\{
\begin{array}{rr}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \alpha_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\
\alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k + \alpha_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\
\ddots \qquad\qquad\qquad \vdots & \\
\alpha_{kk}x_k + \alpha_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn}x_n & = \beta_k
\end{array}
\right. \qquad (10)
$$

որտեղ $k \le n$, $\alpha_{ii} \ne 0$, $i = 1,\ldots,k$: Թեև համակարգի գործակիցները և աջ մասերը փոխվել են, հարմարության համար մենք նրանց կրկին նշանակել ենք α-ներով և β-ներով: Փաստորեն, մենք որոշեցինք համակարգի մատրիցի ռանգը և այն հավասար է k-ի:

Հետադարձ փուլ

Դյուրին է ստուգել, որ, եթե ֆիքսենք $x_{k+1},\ldots,x_n$ անհայտների արժեքները, ապա մնացած $x_1,\ldots,x_k$ անհայտները կորոշվեն միարժեքորեն: Իսկապես, վերջին հավասարումից միարժեքորեն որոշվում է x_k-ն: Ապա իմանալով x_k-ն, նախորդ հավասարումից կստանանք x_{k-1}-ը և այսպես շարունակելով կհասնենք x_1-ին:

Պարզ է, որ $k = n$ դեպքում $x_{k+1},\ldots,x_n$ անհայտները չկան և համակարգն ունի միակ լուծում, որը ստացվում վերը նշված եղանակով:

Եթե $k < n$ համակարգն ունի մեկից ավելի լուծում և, ինչպես տեսել էինք, բոլոր լուծումները ստանալու համար հարկավոր է գտնել համասեռ համակարգի լուծումները, այսինքն $n-k$ հատ գծորեն անկախ լուծում (որոնք կազմում են միջուկի բազիսը) և մեկ մասնավոր լուծում: Դիտարկենք (10) համակարգին համապատասխանող համասեռ համակարգը.

$$
\begin{cases}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \alpha_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\
\qquad\qquad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k + \alpha_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{kk}x_k + \alpha_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = 0
\end{cases}
$$

Վերագրենք $x_{k+1},\ldots,x_n$ անհայտներին

$$
(\underbrace{1,0,0,\ldots,0}_{n-k \text{ հատ}}),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)
$$

արժեքները և գտնենք միարժեքորեն որոշված $x_1,\ldots,x_k$-ները և կստանանք համասեռ համակարգի $n-k$ հատ լուծում.

$$
\begin{gathered}
(\gamma_{11},\ldots,\gamma_{1k},1,0,0,\ldots,0) \\
(\gamma_{21},\ldots,\gamma_{2k},0,1,0,\ldots,0) \\
\vdots \\
(\gamma_{(n-k)1},\ldots,\gamma_{(n-k)k},0,0,0,\ldots,1)
\end{gathered}
$$

Այս լուծումները գծորեն անկախ են, քանի որ, եթե $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k}$ գործակիցներով դրանց գծային կոմբինացիան՝

$$
\left(\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i\gamma_{i1},\ldots,\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i\gamma_{ik},\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k}\right)
$$

հավասար է զրոյի, ուրեմն զրո են $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k}$։

*Այս գտնված $n-k$ հատ համասեռ համակարգի գծորեն անկախ լուծումները կոչվում են համակարգի **ֆունդամենտալ լուծումներ** և դրանք կազմում են համապատասխան միջուկի բազիսը։*

(**10**) *համակարգի մասնավոր լուծումը գտնելու համար վերագրենք $x_{k+1},\ldots,x_n$ անհայտներին զրոյական արժեքներ և գտնենք համապատասխան $x_1,\ldots,x_k$-ները։ Համակարգի ընդհանուր լուծումը կստանանք մասնավոր լուծմանը գումարելով ֆունդամենտալ* լուծումների գծային կոմբինացիաները:

Գաուսի ալգորիթմի միջոցով շատ հարմար է նաև գտնել տրված մատրիցի հակադարձը: Դիցուք A-ն քառակուսի չվերասերված մատրից է: Կազմենք ֆորմալ գծային հավասարումների համակարգ $xA = \beta$, որտեղ β-ն $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ֆորմալ սիմվոլների վեկտոր է (դրանց հետ վարվում ենք այնպես, ինչպես անհայտների նշանների հետ): Կիրառենք Գաուսի ալգորիթմի "ուղիղ փուլը" և համակարգը կբերվի եռանկյունաձև տեսքի, ընդ որում հավասարումների աջ մասերում կառաջանան $\beta_1, \ldots, \beta_n$ սիմվոլների գծային կոմբինացիաները: Հաջորդաբար գտնենք $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ անհայտները, որոնք կարտահայտվեն $\beta_1, \ldots, \beta_n$ սիմվոլների գծային կոմբինացիաներով: Այսինքն, կստանանք $x = \beta B$ և, ուրեմն, $B = A^{-1}$, քանի որ $x = (xA)B = x(AB) \Rightarrow AB = E$:

Գծային օպերատորի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները

Այս պահից սկսած դիտարկելու ենք $\mathcal{A} : L \to L$ տեսակի օպերատորներ, որտեղ որոշման և արժեքների տիրույթները նույն գծային տարածություններն են: Դրանով մենք չենք կորցնում ընդհանրությունը, քանի որ $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$ դեպքում կարող ենք սահմանափակվել $L_2 = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ դեպքով և $\dim L_2 \le \dim L_1$: Որևէն, L_1-ը իզոմորֆ է $V_n(K)$-ին, իսկ L_2-ը՝ $V_m(K)$-ին, որտեղ $m \le n$: Պարզ է, որ $\mathcal{A}$-ն կարող ենք ներկայացնել մատրիցով, որն արտապատկերում է $V_n(K)$-ն $V_n(K)$-ի մեջ:

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է: λ թիվը K դաշտից կոչվում է $\mathcal{A}$ օպերատորի **սեփական արժեք**, եթե գոյություն ունի ոչ զրոյական $x \in L$, որ $\mathcal{A}x = \lambda x$: x-ը կոչվում է λ-ին համապատասխանող **սեփական վեկտոր**:

Օրինակներ

1. L-ը հարթության վեկտորներն են. օպերատորը յուրաքանչյուր վեկտոր բազմապատկում է 3-ով: 3-ը սեփական արժեք է, իսկ կամայական ոչ զրոյական վեկտոր սեփական վեկտոր է:

2. L-ը հարթության վեկտորներն են. օպերատորը յուրաքանչյուր վեկտոր վերլուծում է ըստ միավոր օրտերի (ըստ բազիսի) և ապա առաջին կոորդինատը բազմապատկում է 3-ով, իսկ երկրորդը՝ 5-ով: 3-ը և 5-ը սեփական արժեքներ են, իսկ *կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ վեկտորները՝ սեփական վեկտորներ:*

3. *L-ը հարթության վեկտորներն են. օպերատորը յուրաքանչյուր վեկտոր պտտում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետի շուրջ 90^o անկյունով: Օպերատորը չունի և ոչ մի իրական սեփական արժեք:*

Միևնույն λ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորները (և զրոյական տարրը) կազմում են գծային ենթատարածություն: Իսկապես, նշանակենք

$$M(\lambda) = \{x \mid \mathcal{A}x = \lambda x\}:$$

Դիցուք $x_1, x_2 \in M(\lambda)$: Ստուգենք, որ $\alpha x_1 + \beta x_2 \in M(\lambda)$: Ունենք՝

$$\mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathcal{A} x_1 + \beta \mathcal{A} x_2 = \alpha\lambda x_1 + \beta\lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

և $\alpha x_1 + \beta x_2 \in M(\lambda)$:

Սեփական արժեքները և վեկտորները անմիջականորեն կապված են մատրիցի պարզեցման խնդրի հետ՝ եթե տրված է $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատորի ներկայացումը A մատրիցով որևէ բազիսում, ապա մեկ այլ բազիսում օպերատորը ներկայացվում է $T^{-1}AT$ մատրիցով, որտեղ T-ն անցման մատրիցն է.

մատրիցի պարզեցման խնդիրն այնպիսի բազիսի կառուցումն է, որում մատրիցը ստանում է հնարավորին չափ "պարզ" տեսք (օրինակ, անկյունագծային կամ եռանկյունաձև, կամ համարյա բոլոր տարրերը զրոյական են):

Դիցուք

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

L տարածության այնպիսի բազիս է, որ յուրաքանչյուր e_i-ն սեփական վեկտոր է $\mathcal{A}$-ի համար, որ համապատասխանում է λ_i սեփական արժեքին: Օպերատորի ներկայացումն այդ բազիսում ստացվում է հետևյալ կերպ՝

$$\mathcal{A}\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}e_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ \lambda_n e_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathcal{E}$$

Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ

մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի միայն և միայն այն դեպքում, երբ գծային տարածությունն ունի բազիս կազմված օպերատորի սեփական վեկտորներից:

Թեորեմ 10.

Զույգ առ զույգ իրարից տարբեր $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ սեփական

արժեքներին համապատասխանող $e_1,\ldots,e_m$ սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են։

Ապացույց. Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդն ըստ m-ի։

Եթե $m=1$, ապա e_1-ը լինելով սեփական վեկտոր զրոյական չէ և, ուստի, e_1-ը գծորեն անկախ համակարգ է։

Ենթադրենք, որ թեորեմի պնդումը ճիշտ է բոլոր m-րի համար, որոնք $\leq n$, ապացուցենք պնդումը n-ի համար։

Դիցուք $e_1,\ldots,e_n$-ը $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորներ են և $i\neq j \Rightarrow \lambda_i\neq\lambda_j$։ Ակնհայտ է, որ $\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n=0$ պայմանից բխում է

$$\mathcal{A}(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n)=\alpha_1\mathcal{A}e_1+\ldots+\alpha_n\mathcal{A}e_n=$$

$$\alpha_1\lambda_1e_1+\ldots+\alpha_n\lambda_ne_n=0$$

և

$$\lambda_1\alpha_1e_1+\lambda_1\alpha_2e_2+\ldots+\lambda_1\alpha_ne_n=0։$$

Իրարից հանենք վերջին երկու հավասարությունները և կստանանք՝

$$\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)e_2+\ldots+\alpha_n(\lambda_n-\lambda_1)e_n=0։ \quad (11)$$

Սակայն $e_2,\ldots,e_n$-ը բավարարում են ինդուկցիայի ենթադրությանը և, ուրեմն, գծորեն անկախ են։ Ուստի, (11)-ի գործակիցները զրո են։ Քանի որ $\lambda_i\neq\lambda_1$, $i=2,\ldots,n$, ապա $\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$։ Քանի որ $\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n=0$, ապա նաև $\alpha_1=0$ և թեորեմն ապացուցված է։

Դիցուք $\mathcal{A}:L\to L$ գծային օպերատոր է։ Նշանակենք $\mathcal{I}$-ով միավոր գծային օպերատորը, այսինքն $\mathcal{I}:L\to L$ և $\mathcal{I}x=x$ բոլոր $x\in L$ համար։ Հեշտությամբ ստուգվում է, որ $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}:L\to L$ օպերատորը, որը $x\in L$ տանում է $\mathcal{A}x-\lambda\mathcal{I}x$-ի մեջ (այսինքն, $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x=\mathcal{A}x-\lambda x$) գծային օպերատոր է։

Այն փաստը, որ λ-ն $\mathcal{A}$-ի սեփական արժեքն է և ոչ զրոյական x-ը համապատասխան սեփական վեկտորն է, կարելի է արձանագրել նաև հետևյալ կերպ.

λ-ն $\mathcal{A}$-ի սեփական արժեքն է, եթե կգտնվի ոչ զրոյական $x \in L$ այնպիսին, որ $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = 0$։

Վերջին պայմանը նշանակում է, որ $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ օպերատորի միջուկը պարունակում է ոչ զրոյական տարր և $\dim \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) > 0$։ Դյուրին է համոզվել, որ եթե A մատրիցը $\mathcal{A}$ օպերատորի որևէ ներկայացում է $\mathcal{E}$ բազիսում, ապա $A - \lambda E$ մատրիցը (որտեղ E-ն միավոր մատրիցն է) $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ օպերատորի ներկայացումն է։ Ուստի, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = 0$ պայմանը համարժեք է $\Lambda(A - \lambda E) = 0$ պայմանին, որտեղ Λ-ն x-ի կոորդինատային վեկտորն է $\mathcal{E}$ բազիսում։ Այստեղից հետևում է, որ λ թիվը հանդիսանում է սեփական արժեք $\mathcal{A}$ օպերատորի համար միայն և միայն այն դեպքում, երբ քառակուսի մատրիցով $\Lambda(A - \lambda E) = 0$ գծային համասեռ հավասարումների համակարգը (այստեղ Λ-ն դիտարկվում է որպես անհայտների վեկտոր) ունի ոչ զրոյական լուծում։ Ինչպես գիտենք, դա հնարավոր է միայն, եթե $\det(A - \lambda E) = 0$։ Նկատենք, որ վերջին պայմանը դա հանրահաշվային հավասարում է, որի արմատ է հանդիսանում λ-ն։ Իսկապես, դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

ապա

$$\det(A-\theta E) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\theta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\theta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\theta \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n\theta^n + (-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}\right)\theta^{n-1} + \ldots + \det A$$

և ստացանք n-րդ աստիճանի բազմանդամ θ փոփոխականից: Ուստի, λ-ն սեփական արժեք է միայն և միայն այն դեպքում, երբ λ-ն

$$\det(A-\theta E) = (-1)^n\theta^n + (-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\ldots+\alpha_{nn})\theta^{n-1} + \ldots + \det A$$

բազմանդամի արմատն է: $\det(A-\theta E)$ բազմանդամը կոչվում է $\mathcal{A}$ օպերատորի կամ A մատրիցի ***բնութագրիչ բազմանդամ:*** *Ընդունված է նաև ասել, որ λ-ն, որը $\mathcal{A}$ օպերատորի սեփական արժեքն է, նաև A մատրիցի սեփական արժեքն է: Պարզ է, որ սեփական արժեքների քանակը n-ից շատ լինել չի կարող:*

Քանի որ բնութագրիչ բազմանդամը սահմանվում է $\mathcal{A}$ օպերատորը ներկայացնող մատրիցի միջոցով, անհրաժեշտ է ստուգել, որ արդյունքը կախված չէ կոնկրետ ներկայացումից: Իսկապես, դիցուք A մատրիցը $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումն է $\mathcal{E}$ բազիսում, այսինքն $\mathcal{A}\mathcal{E} = A\mathcal{E}$, իսկ $T^{-1}AT$-ն ներակայացումն է նոր բազիսում (այստեղ T-ն բազիսից բազիս անցման մատրիցն է): Քանի որ

$$T^{-1}(A-\theta E)T = T^{-1}AT - \theta E$$

ստանում ենք՝

$$\det(A-\theta E) = \det T^{-1}\det(A-\theta E)\det T =$$

$$\det(T^{-1}(A-\theta E)T) = \det(T^{-1}AT-\theta E),$$

այսինքն A և $T^{-1}AT$ մատրիցների բնութագրիչ բազմանդամները *հավասար են:*

Վերադառնալով օպերատորի մատրիցի պարզեցման խնդրին, հարկ է նկատել, որ միանգամից պարզ է, որ չի կարելի հույս ունենալ, թե իրական թվերի դաշտի դեպքում բոլոր մատրիցները կարելի է բերել անկյունագծային կամ գոնե եռանկյունաձև տեսքի: Իսկապես,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը* $\theta^2 + 1$*-ն է, որը չունի իրական արմատ (և համապատասխան օպերատորը չունի սեփական արժեք): Դժվար չէ ստուգել, որ սա հարթության վեկտորների տարածության* 90^o*-ով պտույտի օպերատորի մատրիցն է: Եթե որևէ բազիսում այս մատրիցը բերվի եռանկյունաձև տեսքի, ասենք* $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$*, ապա այն կունենա* a *և* b *իրական սեփական արժեքներ: Ընդհանրապես պարզ է, որ եթե մատրիցը եռանկյունաձև է, ապա նրա անկյունագծային տարրերը նրա բոլոր սեփական արժեքներն են:*

Բազմանդամային մատրիցների Սմիթի նորմալ տեսքը

Դիցուք $K[\theta]$-ն K դաշտից գործակիցներով θ փոփոխականից կախված բոլոր բազմանդամների բազմությունն է: **Բազմանդամային մատրից** ասելով կհասկանանք քառակուսի մատրից, որի տարրերը $K[\theta]$-ից են: Այդպիսի մատրիցներին կիրառելի են այսպես կոչված **տարրական գործողությունները**: Մենք կտարբերենք ըստ տողերի և ըստ սյուների սահմանված տարրական գործողությունները:

Ըստ տողերի (սյուների) տարրական գործողություններն են.

- երկու տարբեր տողերը (սյուները) տեղերով փոխելը,
- տողը (սյունը) K դաշտի ոչ զրոյական տարրով բազմապատկելը,
- $K[\theta]$-ից բազմանդամով բազմապատկված տողը (սյունը) մեկ այլ տողին (սյանը) գումարելը:

Սահմանում. $f(\theta) \in K[\theta]$ բազմանդամը կոչվում է նորմավորված, եթե θ-ի ամենաբարձր աստիճանի գործակիցը հավասար է 1-ի:

Թեորեմ 11. (Սմիթի նորմալ տեսքի մասին)

Կամայական բազմանդամային $n \times n$ չափանի մատրից տողերի և սյուների տարրական գործողություններով բերվում է հետևյալ տեսքի.

$$\begin{pmatrix} g_1(\theta) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_r(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

որտեղ $g_1(\theta),\dots,g_r(\theta)\in K[\theta]$ ***նորմավորված բազմանդամներ են,*** $0\le r\le n$ ***և*** $g_i(\theta)$***-ն*** $g_{i+1}(\theta)$***-ի բաժանարարն է,*** $i=1,2,\dots,r-1$***:***

Ապացույց. Նկարագրենք մի ալգորիթմ, որը տրված բազմանդամային մատրիցը բերում է նշված տեսքի:

Ստորև կնկարագրենք տարրական գործողությունների մի հաջորդականություն, որը կիրառելով $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ *մատրիցին, որում* $\alpha_{11}\ne 0$, *կստանանք կամ մի* $B=(\beta_{ij})_{n\times n}$ *մատրից, որում* $\beta_{11}\ne 0$ *և* $\deg\beta_{11}<\deg\alpha_{11}$, *կամ էլ*

$$C=\left(\begin{array}{c|ccc} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^* & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

տեսքի C *մատրիցը, որտեղ* $\gamma_1\in K[\theta]$ *նորմավորված բազմանդամ է, որի վրա առանց մնացորդի բաժանվում են* C^* *մատրիցի բոլոր տարրերը:*

Դիցուք տրված է ոչ զրոյական $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ *մատրիցը: Կարող ենք համարել, որ* $\alpha_{11}\ne 0$ *(հակառակ դեպքում դրան կհասնենք տողերի և/կամ սյուների համապատասխան տեղափոխություններով):* A*-ին կիրառելով տարրական գործողությունների վերը նշված* հաջորդականությունը վերջավոր քայլերից հետո կհանենք C տեսքի մատրիցի, քանի որ հակառակ դեպքում կստանանք բնական թվերի ($\deg\beta_{11}$-րի) անվերջ նվազող հաջորդականություն: Ստանալով C մատրիցը կանգ ենք առնում, եթե $C^* = 0$: Հակառակ դեպքում կիրառում ենք վերը նշված գործողությունների հաջորդականությունը C^* մատրիցին և այսպես շարունակ, մինչև որ ստանանք անկյունագծային մատրից: Այդ մատրիցի անկյունագծային տարրերը նորմավորում ենք բազմապատկելով տողերը K դաշտի համապատասխան թվերով և ստանում ենք թեորեմի պնդման մեջ նշված մատրիցը: Նշենք, որ C^* մատրիցին կիրառած որևէ տարրական գործողություն համապատասխանում է C մատրիցի նույն տողերի (սյուների) տարրական գործողությանը, որը չի փոխում C-ի առաջին տողի և առաջին սյան տարրերը: C^* մատրիցին կիրառած որևէ տարրական գործողության արդյունքում C^* մատրիցի որոշ տարրեր փոխարինվում են C^* մատրիցի տարրերի գծային կոմբինացիաներով, ուստի նոր ստացված տարրեր նույնպես առանց մնացորդի բաժանվում են γ_1-ի վրա:

Այժմ նկարագրենք վերը նշված տարրական գործողությունների հաջորդականությունը, որը կիրառում ենք ոչ զրոյական $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ մատրիցին, որում $\alpha_{11} \neq 0$:

Դեպք 1. Եթե առաջին տողում կգտնվի α_{1j}, $j > 1$, որ $\deg\alpha_{1j} < \deg\alpha_{11}$, ապա տեղերով փոխելով առաջին և j-րդ սյուները ստանում ենք վերը նշված B տեսքի մատրիցը:

Դեպք 2. Նույնն է ինչ որ Դեպք 1-ը կիրառված առաջին սյանը առաջին տողի փոխարեն:

Դեպք 3. Առաջին տողում կգտնվի α_{11}-ի վրա չբաժանվող α_{1j}, $j > 1$: Կիրառելով մնացորդով բաժանումը, ստանում ենք՝

$\alpha_{1j} = \alpha_{11}\lambda + \mu$, որտեղ $\mu \neq 0$ և $\deg\mu < \deg\alpha_{11}$: Բազմապատկենք առաջին սյունը $-\lambda$ բազմանդամով և գումարենք այն j-րդ սյանը: Տեղերով փոխենք առաջին և j-րդ սյուները: Կստացվի վերը նշված B տեսքի մատրիցը:

Դեպք 4. Առաջին սյունում կգտնվի α_{11}-ի վրա չբաժանվող α_{i1}, $i > 1$: Դեպք 3-ին համապատասխան ստանում ենք B տեսքի մատրիցը, վերցնելով տողերի փոխարեն սյուները և սյուների փոխարեն տողերը:

Դեպք 5. Առաջին տողի և առաջին սյան բոլոր տարրերը բաժանվում են առանց մնացորդի α_{11}-ի վրա: Ուրեմն, $\alpha_{1j} = \alpha_{11}\lambda_j$, $j = 2,\dots,n$: Առաջին սյունը բազմապատկում ենք $-\lambda_j$ բազմանդամով և գումարում ենք այն j-րդ սյանը: Արդյունքում առաջին տողի j-րդ տարրը դարձնում ենք զրոյական: Այսինքն առաջին տողի բոլոր տարրերը, բացի α_{11}-ից, դառնում են զրոյական: Նմանապես զրոյական ենք դարձնում առաջին սյան բոլոր տարրորը, բացի α_{11}-ից: Այսպիսով, մատրիցը բերվում է

$$E = \left(\begin{array}{c|ccc} \varepsilon_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & E^* & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

տեսքին: Եթե E^*-ի բոլոր տարրերն առանց մնացորդի բաժանվում են ε_{11}-ի վրա, ապա ստացել ենք C տեսքի մատրիցը: Հակառակ դեպքում կգտնվի ε_{ij}, $i,j > 1$, որ չի բաժանվում ε_{11}-ի վրա: Գումարելով i-րդ տողն առաջինին անցնում ենք Դեպք 1-ին:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 11-ում մատրիցի նշված տեսքը կոչվում է բազմանդամային մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսք։

Օրինակ

Սմիթի նորմալ տեսքի բերենք հետևյալ բազմանդամային մատրիցը՝

$$\begin{pmatrix} \theta-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \theta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

Համաձայն Դեպք 2-ի տեղափոխում ենք առաջին և երկրորդ տողերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta-1 & 0 & 0 \\ \theta-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

Տեղի ունի Դեպք 5-ը։ Զրոյացնում ենք առաջին տողի $\theta-1$ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta-2 & -(\theta-1)(\theta-2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ -1 & \theta-2 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

Զրոյացնենք առաջին սյան վերջին տարրը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta-2 & -(\theta-1)(\theta-2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta-2 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

Հետո զրոյացնում ենք առաջին սյան երկրորդ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\theta-1)(\theta-2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta-2 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

Ստացանք C տեսքի մատրից, որի համար

$$C^* = \begin{pmatrix} -(\theta-1)(\theta-2) & 0 & 0 \\ 1 & \theta & 1 \\ \theta-2 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

և C^*-ի բոլոր տարրերը բաժանվում են 1-ի վրա:

Այժմ նույն ալգորիթմը կիրառում ենք C^*-ին: Համաձայն Դեպք 2-ի տեղափոխում ենք առաջին և երկրորդ տողերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta & 1 \\ -(\theta-1)(\theta-2) & 0 & 0 \\ \theta-2 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

Ստացանք Դեպք 5-ը: Զրոյացնում ենք առաջին սյան երկրորդ և երրորդ տարրերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ \theta-2 & -1 & \theta-2 \end{pmatrix}$$

և

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -1-\theta(\theta-2) & 0 \end{pmatrix}$$

Այժմ զրոյացնում ենք առաջին տողի երկրորդ և երրորդ տարրերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -1-\theta(\theta-2) & 0 \end{pmatrix}$$

և

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -1-\theta(\theta-2) & 0 \end{pmatrix}$$

Այժմ ստացանք Հերմիտյան C տեսքի մատրից, որի C^*-ի բոլոր տարրերը բաժանվում են 1-ի վրա։ Ուստի, ալգորիթմը կիրառում ենք հետևյալ մատրիցին՝

$$\begin{pmatrix} \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ -(\theta-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Տեղի ունի Դեպք 1-ը, ուստի տեղափոխում ենք առաջին և երկրորդ սյուները՝

$$\begin{pmatrix} (\theta-1)(\theta-2) & \theta(\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

Հանգեցինք Դեպք 5-ին։ Զրոյացնում ենք առաջին տողի երկրորդ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} (\theta-1)(\theta-2) & 0 \\ 0 & -(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

Քանի որ $-(\theta-1)^2$ *տարրը չի բաժանվում* $(\theta-1)(\theta-2)$*-ի վրա, գումարում ենք երկրորդ տողը առաջինին և անցնում ենք Դեպքեր* **1**-**5**-*ի ստուգմանը՝*

$$\begin{pmatrix} (\theta-1)(\theta-2) & -(\theta-1)^2 \\ 0 & -(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

Դեպքեր **1**,**2**-*ը տեղի չունեն: Տեղի ունի Դեպք* **3**-*ը՝* $-(\theta-1)^2 = (\theta-1)(\theta-2)(-1) + (1-\theta)$*: Ուստի, երկրորդ սյանը գումարում ենք առաջինը բազմապատկված* 1*-ով՝*

$$\begin{pmatrix} (\theta-1)(\theta-2) & -(\theta-1) \\ 0 & -(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

և հետո տեղափոխում ենք սյուները՝

$$\begin{pmatrix} -(\theta-1) & (\theta-1)(\theta-2) \\ -(\theta-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ստացանք Դեպք **5**-*ը: Զրոյացնենք սկզբից առաջին տողի երկրորդ տարրը՝*

$$\begin{pmatrix} -(\theta-1) & 0 \\ -(\theta-1)^2 & (\theta-2)(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

Հետո զրոյացնենք առաջին սյան երկրորդ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} -(\theta-1) & 0 \\ 0 & (\theta-2)(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

Ստացվեց վերջնական C *տեսքի մատրիցը: Բազմապատկելով* *առաջին տողը* -1*-ով, նորմավորենք* $-(\theta-1)$ *տարրը՝*

$$\begin{pmatrix} (\theta-1) & 0 \\ 0 & (\theta-2)(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

Սկզբնական մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը հետևյալն է՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\theta-1)^2(\theta-2) \end{pmatrix}$$

Նկատենք, որ տարրական գործողությունները կարելի է իրականացնել սկզբնական մատրիցը հատուկ տեսքի մատրիցներով բազմապատկելով:

Դիցուք տրված է բազմանդամային A *մատրիցը, որում հարկավոր է տեղերով փոխել առաջին և երկրորդ տողերը: Կառուցենք հետևյալ մատրիցը՝*

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Դյուրին է ստուգել, որ բազմպատկելով $P_{12}A$ *տեղափոխում ենք* A*-ի առաջին և երկրորդ տողերը, իսկ բազմապատկելով* AP_{12} *տեղափոխում ենք* A*-ի առաջին և երկրորդ սյուները: Նմանապես, յուրաքանչյուր* $s \neq t,\ 1 \leq s,t \leq n$ *համար սահմանենք* $P_{st} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ *մատրիցը, որում* $\alpha_{st} = \alpha_{ts} = 1,\ \alpha_{ii} = 1$ *բոլոր* $i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{s,t\}$ *և մնացած բոլոր* տարրերը զրոյական են: Ակնհայտ է, որ բազմապատկելով $P_{st}A$, տեղափոխում ենք A-ի s-րդ և t-րդ տողերը, իսկ բազմապատկելով AP_{st}, տեղափոխում ենք A-ի s-րդ և t-րդ սյուները: Այսպիսով, P_{st} մատրիցով ձախից բազմապատկումը տեղափոխում է մատրիցի տողերը, իսկ աջից բազմապատկումը՝ սյուները: Դյուրին է ստուգել, որ $P_{st}^{-1} = P_{st}$:

Դիտարկենք այժմ տողի (սյան) բազմապատկումը K դաշտի ոչ զրոյական λ թվով: Կառուցենք M_k մատրիցը, որը տարբերվում է միավոր $n \times n$ չափանի E մատրիցից միայն նրանով, որ k-րդ անկյունագծային տարրը հավասար է λ թվին: Բազմապատկելով ձախից M_kA, բազմապատկում ենք λ-ով A-ի k-րդ տողը, իսկ բազմապատկելով աջից՝ AM_k բազմապատկում ենք λ-ով A-ի k-րդ սյունը: Նկատենք, որ $M_k^{-1} = M_{k^{-1}}$:

Կառուցենք $N_{k,m}(g)$ մատրիցը, որտեղ $1 \le k < m \le n$ հետևյալ կերպ՝ $N_{k,m}(g)$-ի տարրերը համընկնում են միավոր E մատրիցի տարրերի հետ, միայն m-րդ տողի և k-րդ սյան հատման տեղում գտնվող տարրը հավասար է $g(\theta) \in K[\theta]$:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} k & \cdots & m \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ k \to \\ \vdots \\ m \to \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & \vdots & \ddots & & \\
 & & g(\theta) & \cdots & 1 & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Պարզ է, որ բազմապատկելով $N_{s,t}(g)A$, տրված A մատրիցի s-րդ տողը բազմապատկվում է $g(\theta)$ բազմանդամով և գումարվում t-րդ տողին, իսկ բազմապատկելով $AN_{t,s}(g)$, տրված A մատրիցի s-րդ սյունը բազմապատկվում է $g(\theta)$ բազմանդամով և գումարվում t-րդ սյանը: Դյուրին է ստուգել, որ $N_{k,m}^{-1}(g) = N_{k,m}(-g)$:

Այսպիսով,

տարրական գործողությունները տողերի (սյուների) նկատմամբ իրացվում են A մատրիցին ձախից (աջից) վերը նշված չվերասերված մատրիցների բազմապատկմամբ:

Ձախից բազմապատկվող մատրիցների արտադրյալը նշանակենք P-ով, իսկ աջից՝ Q-ով: Ակնհայտ է, որ այդ մատրիցները չվերասերված են: Այժմ Թեորեմ 11-ը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ.

Թեորեմ 12.

Կամայական բազմանդամային $n \times n$ չափանի A մատրիցի համար կգտնվեն չվերասերված $n \times n$ չափանի P և Q բազմանդամային մատրիցներ, որ PAQ մատրիցը Սմիթի նորմալ տեսքի է:

Այժմ հետազոտենք Սմիթի նորմալ տեսքի միակության հարցը: Դիցուք $n \times n$ չափանի A մատրիցը Սմիթի նորմալ տեսքի է

$$A = \begin{pmatrix} g_1(\theta) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_r(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ինչպես գիտենք, $f(\theta), g(\theta) \in K[\theta]$ բազմանդամների $h(\theta) = (f(\theta), g(\theta))$ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը սահմանվում է K-ից ոչ զրոյական արտադրիչի ճշտությամբ՝ $\lambda h(\theta)$-ը նորից $f(\theta)$ և $g(\theta)$ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է: Սակայն գոյություն ունի միակ նորմավորված ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:

Հաշվենք A մատրիցի բոլոր 1-չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը: Քանի որ $g_i(\theta)$-ն $g_{i+1}(\theta)$-ի բաժանարարն է, դյուրին է տեսնել, որ դա $g_1(\theta)$-ն է: Նմանապես բոլոր 2-չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կլինի $g_1(\theta)g_2(\theta)$-ը: 3-չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կլինի $g_1(\theta)g_2(\theta)g_3(\theta)$-ը և այսպես շարունակ: r-չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կլինի $g_1(\theta)\dots g_r(\theta)$-ը և, եթե $r < n$, ապա ավելի մեծ չափի բոլոր մինորները զրոյական են: Նկատենք, որ բոլոր $g_1(\theta)\dots g_i(\theta)$, $i \le r$, արտադրյալները նորմավորված են:

Դյուրին է նկատել, որ

- տողը (սյունը) K դաշտի ոչ զրոյական տարրով բազմապատկելը
- $K[\theta]$-ից բազմանդամով բազմապատկված տողը (սյունը) մեկ այլ տողին (սյանը) գումարելը

տարրական գործողությունները կիրառված բազմանդամային մատրիցին կամ չեն փոխում մինորների արժեքները, կամ դրանք բազմապատկում են դաշտի ոչ զրոյական թվերով: Ուստի, մատրիցի որևէ ֆիքսված չափի բոլոր մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը չի փոխվի:

Դիտարկենք տողերի/սյուների տեղափոխության դեպքը: Ֆիքսված չափի մինորները կամ պարունակում են երկու տեղափոխվող տողերը/սյուները, կամ պարունակում են տեղափոխվող տողերից/սյուներից միայն մեկը, կամ էլ չեն պարունակում այդ տողերը/սյուները: Առաջին դեպքում փոխվում է միայն մինորի արժեքի նշանը (այսինքն մինորը բազմապատկվում է դաշտի ոչ զրոյական թվով), իսկ վերջին դեպքում մինորի արժեքն ընդհանրապես չի փոխվում: Եթե մինորը պարունակում է տեղափոխվող տողերից/սյուներից միայն մեկը, ապա դրա արժեքը դառնում է հավասար մեկ այլ նույն չափանի մինորի արժեքին՝ այն մինորի, որը պարունակում է մյուս տողափոխվող տողը/սյունը և որի մնացած բոլոր տողերը/սյուները համընկնում են դիտարկվող մինորի տողերի/սյուների հետ: Ակնհայտ է, որ տրված չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը չի փոխվի:

Հետևաբար, A մատրիցի բոլոր 1-չափանի մինորների նորմավորված ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը որոշված է միարժեքորեն և դա $g_1(\theta)$-ն է: 2-չափանի մինորների նորմավորված ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նույնպես որոշված է միարժեքորեն և դա $g_1(\theta)g_2(\theta)$-ն է, այսինքն $g_2(\theta)$-ն էլ է որոշված միարժեքորեն, քանի որ $g_2(\theta) = \dfrac{g_1(\theta)g_2(\theta)}{g_1(\theta)}$: Նմանապես համոզվում ենք, որ բոլոր

$g_1(\theta),\dots,g_r(\theta)$ *բազմանդամներն որոշված են միարժեքորեն: Ուրեմն, տարրական գործողությունների ինչպիսի հաջորդականությամբ էլ որ* A *մատրիցը բերվի Սմիթի նորմալ տեսքի, այդ տեսքը միշտ կստացվի նույնը:*

$g_1(\theta),\dots,g_r(\theta)$ *բազմանդամները կոչվում են* A *մատրիցի **ինվարիանտ գործակիցներ**:*

Թեորեմ 13. (*Սմիթի նորմալ տեսքի միակությունը*)

Մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը որոշված է միարժեքորեն:

Ինվարիանտ ենթատարածություններ

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է: L տարածության L_1 ենթատարածությունը կոչվում է **ինվարիանտ** $\mathcal{A}$ օպերատորի նկատմամբ (կամ ուղղակի ինվարիանտ, երբ պարզ է, թե որ օպերատորը նկատի ունենք), եթե $x \in L_1 \Rightarrow \mathcal{A}x \in L_1$:

Օրինակ, գիտենք որ $M(\lambda) = \{x \mid \mathcal{A}x = \lambda x\}$ ենթատարածություն է L-ում: Այն ինվարիանտ է, քանի որ, եթե $x \in M(\lambda)$, ապա $\mathcal{A}x = \lambda x$ և $\mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}x)$, այսինքն $\mathcal{A}x \in M(\lambda)$:

Ակնհայտ է, որ $\mathcal{A}$ օպերատորի սահմանափակումը L_1 վրա նույնպես գծային օպերատոր է:

Ենթադրենք այժմ, որ $L = L_1 \dotplus L_2$, L_1 և L_2 ենթատարածությունները ինվարիանտ են $\mathcal{A}$-ի նկատմամբ: Քանի որ գումարն ուղիղ է, ամբողջ տարածության բազիսը կարող ենք կազմել միավորելով ենթատարածությունների բազիսները, այսինքն, եթե $\mathcal{E}_1$-ը և $\mathcal{E}_2$-ը համապատասխանաբար L_1-ի և L_2-ի բազիսներն են, ապա

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}$$

ամբողջ L տարածության բազիս է: Նշանակենք A-ով այդ բազիսում $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումը՝ $\mathcal{A}\mathcal{E} = A\mathcal{E}$, իսկ A_1-ով և A_2-ով $\mathcal{A}$-ի ներկայացումները համապատասխանաբար $\mathcal{E}_1$ և $\mathcal{E}_2$ բազիսներում, դիտարկելով $\mathcal{A}$-ի սահմանափակումները L_1-ի և L_2-ի վրա՝ $\mathcal{A}\mathcal{E}_1 = A_1\mathcal{E}_1$ և $\mathcal{A}\mathcal{E}_2 = A_2\mathcal{E}_2$: Պարզ է որ՝

$$A \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{pmatrix} = A\mathcal{E} = \mathcal{A}\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\mathcal{E}_1 \\ \mathcal{A}\mathcal{E}_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1\varepsilon_1 \\ A_2\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}։$$

Հետևաբար,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

այսինքն, օպերատորի մատրիցը տրոհվում է բլոկերի և այդ բլոկերը համապատասխանում են օպերատորի ներկայացումներին ինվարիանտ տարածություններում և մատրիցի պարզեցման խնդիրը բերվում է նույն խնդրին ընդհանուր դեպքում ավելի փոքր ինվարիանտ ենթատարածությունում։ Պարզ է նաև, որ այս դատողությունն ուժի մեջ է, երբ ուղիղ գումարում գումարելիների թիվը երկուսից ավելին է։ Այժմ կփորձենք պարզել, թե ինչպես կարելի է տարածությունը տրոհել ինվարիանտ ենթատարածությունների։

Վերացնող և մինիմալ բազմանդամներ

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է, որտեղ L-ը գծային տարածություն է K դաշտի նկատմամբ, իսկ $K[\theta]$-ն K դաշտից գործակիցներով θ փոփոխականից կախված բոլոր բազմանդամների բազմությունն է: Դիցուք $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \ldots + \alpha_m\theta^m \in K[\theta]$:

Նշանակենք $f(\mathcal{A}) = \alpha_0\mathcal{I} + \alpha_1\mathcal{A} + \alpha_2\mathcal{A}^2 + \ldots + \alpha_m\mathcal{A}^m$, $\mathcal{I}$-ով նշանակելով միավոր օպերատորը: Դյուրին է ստուգել, որ $f(\mathcal{A})$-ն գծային օպերատոր է և այն սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$f(\mathcal{A})x = \alpha_0 x + \alpha_1(\mathcal{A}x) + \alpha_2(\mathcal{A}^2x) + \ldots + \alpha_m(\mathcal{A}^m x),$$

որտեղ $\mathcal{A}^k x = \mathcal{A}(\ldots(\mathcal{A}(\mathcal{A}x))\ldots)$ - $\mathcal{A}$ օպե րատորի հաջորդաբար (k անգամ) կիրառումն է: Ուրեմն, $f(\mathcal{A}) : L \to L$: Ակնհայտ է նաև, որ $f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})$ կամայական $f(\theta), g(\theta) \in K[\theta]$ համար:

Սահմանում: $f(\theta) \in K[\theta]$ կոչվում է *վերացնող բազմանդամ* L գծային տարածության x տարրի համար, եթե $f(\mathcal{A})x = 0$:

Դիցուք $x \in L$: Նշանակենք $F(x)$-ով x տարրի բոլոր վերացնող բազմանդամների բազմությունը $K[\theta]$-ում: Պարզ է, որ այն դատարկ չէ, քանի որ զրոյական բազմանդամը վերացնող է բոլոր տարրերի համար:

Եթե $x = 0$, ապա $F(x) = K[\theta]$:

Եթե $x \neq 0$, ապա $F(x)$-ը չի պարունակում և ոչ մի 0 աստիճանի բազմանդամ: Դիցուք $n = 1 + \dim L$: Եթե բոլոր $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}x$ տարրերը տարբեր են, ապա դրանք գծորեն կախված են և կգտնվեն $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$, որ

$$\alpha_0 x + \alpha_1(\mathcal{A}x) + \alpha_2(\mathcal{A}^2x) + \ldots + \alpha_{n-1}(\mathcal{A}^{n-1}x) = 0,$$

այսինքն, $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\theta^{n-1}$ ոչ զրոյական բազմանդամը վերացնող է x տարրի համար: Եթե $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}x$ տարրերը տարբեր չեն, ապա $\mathcal{A}^px = \mathcal{A}^qx$, որտեղ $n > p > q \geq 0$: Այս դեպքում $\theta^p - \theta^q$ կլինի ոչ զրոյական վերացնող բազմանդամ x տարրի համար:

Նշանակենք $f(\theta)$-ով $F(x)$-ի փոքրագույն դրական աստիճանի բազմանդամներից որևէ մեկը: Դիցուք $0 \neq g(\theta) \in F(x)$: Բաժանենք $g(\theta)$-ն $f(\theta)$-ի վրա՝ $g(\theta) = f(\theta)h(\theta) + r(\theta)$: Կամ $r(\theta) \equiv 0$, կամ $0 \leq \deg r < \deg f$: Պարզ է, որ $r(\theta) \in F(x)$, քանի որ $r(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) - f(\mathcal{A})h(\mathcal{A})$: Եթե $r(\theta) \neq 0$, ապա $\deg r > 0$ և $f(\theta)$-ի աստիճանը ամենափոքրը չէ $F(x)$-ում: Ուստի, $r(\theta) \equiv 0$ և $F(x)$-ի յուրաքանչյուր բազմանդամ առանց մնացորդի բաժանվում է $f(\theta)$-ի վրա:

Այսպիսով տեսանք, որ $F(x)$-ը կամ համընկնում է ամբողջ $K[\theta]$-ի հետ, կամ էլ $F(x)$-ը կազմված է $F(x)$-ում պարունակվող ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամին բոլոր պատիկ բազմանդամներից: Այդ բազմանդամը՝ $F(x)$-ում ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամը, կոչվում է x տարրի **մինիմալ բազմանդամ**:

Եթե $f(\theta)$ բազմանդամը վերացնող է գծային տարածության բոլոր տարրերի համար, ապա այն կոչվում է **տարածության վերացնող բազմանդամ**: Տարածության վերացնող բազմանդամների բազմությունը համընկնում է ամբողջ $K[\theta]$-ի հետ միայն, երբ այդ տարածությունը զրո չափանի է: Մնացած բոլոր դեպքերում վերացնող բազմանդամների բազմությունը չի պարունակում և ոչ մի 0 աստիճանի բազմանդամ և կազմված է այդ բազմության ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամին բոլոր պատիկ բազմանդամներից (սա ապացուցվում է $F(x)$-ի դեպքի նման)։ Այդ բազմանդամը՝ տարածության վերացնող բազմանդամների բազմության ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամը, կոչվում է **տարածության մինիմալ բազմանդամ**։

Ցույց տանք, որ միշտ գոյություն ունի տարածության ոչ զրոյական վերացնող բազմանդամ։ Դիցուք L-ը գծային տարածություն է K դաշտի նկատմամբ և $n = \dim L$։ Դյուրին է ստուգել, որ բոլոր գծային օպերատորների բազմությունը, որոնք արտապատկերում են L-ը L-ի մեջ կազմում է գծային տարածություն։ Իսկապես, եթե $\mathcal{B} : L \to L$ և $\mathcal{C} : L \to L$, ապա $\mathcal{B} + \mathcal{C} : L \to L$ օպերատորը սահմանվում է որպես $(\mathcal{B} + \mathcal{C})x = \mathcal{B}x + \mathcal{C}x$, իսկ $\lambda\mathcal{B} : L \to L$ օպերատորը որպես՝ $(\lambda\mathcal{B})x = \lambda\mathcal{B}x$։ Ֆիքսելով որևէ $\mathcal{E}$ բազիս, ստանում ենք օպերատորների ներկայացումները $n \times n$ չափանի մատրիցներով, ընդ որում, եթե $\mathcal{B}$-ն ներկայացվում է B մատրիցով, իսկ $\mathcal{C}$-ն՝ C-ով, ապա $\mathcal{B} + \mathcal{C}$-ն ներկայացվում է $B + C$-ով և $\lambda\mathcal{B}$-ն λB-ով։ Ուստի, $\alpha_0\mathcal{I} + \alpha_1\mathcal{A} + \alpha_2\mathcal{A}^2 + \ldots + \alpha_m\mathcal{A}^m$ օպերատորը, որտեղ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ և $\mathcal{I}$-ն նույնաբար (միավոր) օպերատորն է, ներկայացվում է $\alpha_0E + \alpha_1A + \alpha_2A^2 + \ldots + \alpha_mA^m$ մատրիցով (E-ն միավոր մատրիցն է)։ Դիտարկենք $E, A, \ldots, A^{n^2}$ մատրիցները։ Եթե դրանց մեջ չկան կրկնվողներ, ապա քանի որ $n \times n$ չափանի մատրիցների գծային տարածությունը n^2 չափանի է, $E, A, \ldots, A^{n^2}$ մատրիցները գծորեն կախված են և կգտնվեն $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2} \in K$, որ

$$\alpha_0E + \alpha_1A + \alpha_2A^2 + \ldots + \alpha_{n^2}A^{n^2} = 0\text{։}$$

Հետևաբար, $\alpha_0\mathcal{I} + \alpha_1\mathcal{A} + \ldots + \alpha_{n^2}\mathcal{A}^{n^2} = 0$ և $\alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \ldots + \alpha_{n^2}\theta^{n^2}$-ն տարածության ոչ զրոյական վերացնող բազմանդամ է: Եթե $A^p = A^q$, որտեղ $n^2 > p > q \geq 0$, ապա $\mathcal{A}^p = \mathcal{A}^q$ և $\theta^p - \theta^q$-ն կլինի ոչ զրոյական վերացնող բազմանդամ տարածության համար:

Դիցուք $e_1,\ldots,e_n$-ը L տարածության բազիսն է և $f_1(\theta),\ldots,f_n(\theta)$ համապատասխանաբար $e_1,\ldots,e_n$ տարրերի մինիմալ բազմանդամներն են: Եթե $f(\theta)$-ն տարածության մինիմալ բազմանդամն է, ապա այն վերացնող է ամեն մի e_i համար և ուստի բաժանվում է առանց մնացորդի յուրաքանչյուր $f_i(\theta)$-ի վրա $i = 1,2,\ldots,n$: Ուրեմն, $f(\theta)$-ն բաժանվում է նաև $f_1(\theta),\ldots,f_n(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի վրա: Մյուս կողմից, քանի որ $f_1(\theta),\ldots,f_n(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը պատիկ է յուրաքանչյուր $f_i(\theta)$-ին, ապա այն վերացնող է յուրաքանչյուր e_i համար: Այստեղից անմիջապես ստանում ենք, որ տարածության մինիմալ բազմանդամը համընկնում է $f_1(\theta),\ldots,f_n(\theta)$ բազմանդամների նորմավորված ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի հետ:

Ցիկլիկ ենթատարածություններ

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է, $e \in L$, $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \ldots + \alpha_{m-1}\theta^{m-1} + \theta^m$-ը e-ի մինիմալ բազմանդամն է և $\deg f(\theta) = m$: Դյուրին է ստուգել, որ $e, \mathcal{A}e, \mathcal{A}^2e, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}e$ համակարգը գծորեն անկախ է, քանի որ հակառակ դեպքում կգտնվեր e տարրի վերացնող բազմանդամ, որի կարգը փոքր է m-ից: Պարզ է նաև, որ

$$\mathcal{A}^m e = -\alpha_0 e - \alpha_1 \mathcal{A}e - \ldots - \alpha_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}e \tag{12}$$

Նշանակենք $L(e)$-ով հետևյալ բազմությունը՝ $\{g(\mathcal{A})e \mid g(\theta) \in K[\theta]\}$: Ակնհայտ է, որ $L(e)$-ն գծային ենթատարածություն է L-ում: Բաժանենք $g(\theta)$-ն $f(\theta)$ մինիմալ բազմանդամի վրա՝ $g(\theta) = f(\theta)h(\theta) + r(\theta)$, որտեղ կամ $r(\theta)$-ն զրոյական բազմանդամն է, կամ էլ $\deg r(\theta) < m$: Ուստի, $r(\mathcal{A})e$ պատկանում է $e, \mathcal{A}e, \mathcal{A}^2e, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}e$ համակարգի գծային թաղանթին և

$$L(e) = \{e, \mathcal{A}e, \mathcal{A}^2e, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}e\}^*:$$

Ակնհայտ է, որ $\dim L(e) = m$ և $L(e)$-ն ինվարիանտ ենթատարածություն է (դա անմիջապես հետևում է (12)-ից):

$L(e)$ ենթատարածությունը կոչվում է **ցիկլիկ** ենթատարածություն ծնված e տարրով: Ցիկլիկ ենթատարածության չափը հավասար է նրա ծնիչի (e-ի) մինիմալ բազմանդամի աստիճանին: Պարզ է, որ մինիմալ բազմանդամի աստիճանն ավելի մեծ չէ, քան $\dim L$-ը:

Ստորև կտեսնենք, որ գծային տարածությունը միշտ կարելի է տրոհել ցիկլիկ ենթատարածությունների:

Օպերատորի բնութագրիչ մատրիցի "վերացնող" հատկությունը

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է K թվային դաշտի նկատմամբ:

Ֆիքսենք L տարածության որևէ բազիս՝

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

և դիցուք՝

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումն է այդ բազիսում, այսինքն՝ $\mathcal{A}\mathcal{E} = A\mathcal{E}$ և $\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j,\ i = 1,2,\dots,n$: Դիտարկենք A-ի բնութագրիչ մատրիցը՝

$$A - \theta E = \begin{pmatrix} \alpha_{11}-\theta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\theta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\theta \end{pmatrix}$$

Այս մատրիցի տողերն ունեն հետևյալ հատկությունը: Դիտարկենք i-րդ տողը որպես n հատ բազմանդամների հավաքածու՝ $v_i \equiv (\alpha_{i1},\dots,\alpha_{ii-1},\alpha_{ii}-\theta,\alpha_{ii+1},\dots,\alpha_{in})$: Այդ հավաքածուից կազմենք *օպերատորների հետևյալ n-յակը՝*

$$(\alpha_{i\,1}\mathcal{I},\dots,\alpha_{i\,i-1}\mathcal{I},\alpha_{i\,i}\mathcal{I}-\mathcal{A},\alpha_{i\,i+1}\mathcal{I},\dots,\alpha_{i\,n}\mathcal{I})$$

և բազմապատկենք այն որպես մատրից $\mathcal{E}$ սյունով

$$v_i\mathcal{E}=(\alpha_{i\,1}\mathcal{I},\dots,\alpha_{i\,i-1}\mathcal{I},\alpha_{i\,i}\mathcal{I}-\mathcal{A},\alpha_{i\,i+1}\mathcal{I},\dots,\alpha_{i\,n}\mathcal{I})\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}= \qquad (13)$$

$$-\mathcal{A}e_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j=0$$

Նշանակենք $K^n[\theta]$-ով $K[\theta]$-ից բազմանդամների բոլոր n-յակների բազմությունը։ Սահմանենք $\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E})$ բազմությունն որպես

$$\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E})=\{(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta))\in K^n[\theta]\mid (f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}=0\}$$

Պարզ է, որ $(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}=0$ պայմանը համարժեք է

$$(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}=f_1(\mathcal{A})e_1+\dots+f_n(\mathcal{A})e_n=0$$

պայմանին։ (13)-ից ստանում ենք, որ բնութագրիչ մատրիցի յուրաքանչյուր տող պատկանում է $\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E})$ բազմությանը՝ $v_i\in\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E})$, $i=1,2,\dots,n$։

Պնդում 14․

Յուրաքանչյուր** $(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta))\in\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E})$ **համար կգտնվի

$$(g_1(\theta),\dots,g_n(\theta))\in K^n[\theta],$$

որ

$$(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta))=\sum_{i=1}^{n}g_i(\theta)v_i$$

ուստի,

$$\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E}) = \left\{\sum_{i=1}^{n} g_i(\theta)v_i \;\mid\; (g_1(\theta),\dots,g_n(\theta)) \in K^n[\theta]\right\}$$

Ապացույց. *Նախ ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր* $(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ *համար կգտնվեն* $(g_1(\theta),\dots,g_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ *և* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in V_n(K)$*, որ*

$$(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\theta)v_i + (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \tag{14}$$

(14)*-ը կապացուցենք ինդուկցիայով, ըստ* $\max\{\deg f_1,\dots,\deg f_n\}$*-ի։*

Եթե $\max\{\deg f_1,\dots,\deg f_n\} = 0$*, ապա* $(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in V_n(K)$ *և վերցնելով* $g_i(\theta) = 0$ *բոլոր* $i \in \{1,2,\dots,n\}$ *համար ստանում ենք* (14)*-ը։*

Ենթադրենք այժմ, որ (14)*-ը ստույգ է բոլոր* $(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ *համար, որ* $\max\{\deg f_1,\dots,\deg f_n\} < m$*։* *Դիցուք* $(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ *և* $\max\{\deg f_1,\dots,\deg f_n\} = m$*։* *Բաժանենք* $f_i(\theta)$*-ն* $\alpha_{i\,i}-\theta$*-ի վրա՝* $f_i(\theta) = h_i(\theta)(\alpha_{i\,i}-\theta)+\beta_i$*, որտեղ* $\beta_i \in K$*։ Ստանում ենք՝*

$$\begin{gathered}(0,\dots,0,f_i,0,\dots,0) = (0,\dots,0,h_i(\alpha_{i\,i}-\theta)+\beta_i,0,\dots,0) = \\ h_i(\alpha_{i\,1},\dots,\alpha_{i\,i-1},\alpha_{i\,i}-\theta,\alpha_{i\,i+1},\dots,\alpha_{i\,n}) + \\ (-\alpha_{i\,1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,i-1}h_i,\beta_i,-\alpha_{i\,i+1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,n}h_i) = \\ h_iv_i + (-\alpha_{i\,1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,i-1}h_i,\beta_i,-\alpha_{i\,i+1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,n}h_i)\end{gathered}$$

Քանի որ $\deg h_i(\theta) = \deg f_i(\theta)-1$*, ապա*

$$(-\alpha_{i\,1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,i-1}h_i,\beta_i,-\alpha_{i\,i+1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,n}h_i)$$

հավաքածուի յուրաքանչյուր տարրի աստիճանը փոքր է $\deg f_i(\theta)$*-ից։* *Հետևաբար՝*

$$(f_1,\dots,f_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i v_i + \sum_{i=1}^{n}(-\alpha_{i\,1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,i-1}h_i,\beta_i,-\alpha_{i\,i+1}h_i,\dots,-\alpha_{i\,n}h_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(\theta)v_i + (t_1(\theta),\dots,t_n(\theta)),$$

որտեղ $\deg t_i(\theta) < m$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$: Համաձայն ինդուկտիվ ենթադրության, կգտնվեն $(k_1(\theta),\dots,k_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ և $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in V_n(K)$, որ

$$(t_1(\theta),\dots,t_n(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\theta)v_i + (\lambda_1,\dots,\lambda_n):$$

Ուստի՝

$$(f_1,\dots,f_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\theta)v_i + \sum_{i=1}^{n} k_i(\theta)v_i + (\lambda_1,\dots,\lambda_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(h_i(\theta)+k_i(\theta))v_i + (\lambda_1,\dots,\lambda_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(\theta)v_i + (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

և (14)-ն ապացուցված է:

Ակնհայտ է, որ $\sum_{i=1}^{n} g_i(\theta)v_i \in \mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E})$, քանի որ ըստ (13)-ի $v_i\mathcal{E} = 0$:

Դիցուք այժմ $(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in \mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E})$: Համաձայն (14)-ի

$$(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\theta)v_i + (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

Ունենք՝ $(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = 0$, ուրեմն՝

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(\mathcal{A})v_i\mathcal{E} + (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mathcal{E} = 0$$

Սակայն համաձայն (13)-ի, $v_i\mathcal{E} = 0$ և $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mathcal{E} = 0$: Բազիսային

տարրերի գծային անկախությունից հետևում է, որ $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ ***և***

$$(f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\theta) v_i$$

Պնդումն ապացուցված է:

Տարածության տրոհումը ցիկլիկ ենթատարածությունների

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է K թվային դաշտի նկատմամբ:

Ֆիքսենք L տարածության որևէ բազիս՝

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

և յուրաքանչյուր

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$$

բազմանդամների n-յակին համապատասխանեցնենք L տարածության

$$(f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n$$

տարրը:

Դիտարկենք հետևյալ բազմությունը՝

$$\{f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Քանի որ կամայական $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V_n(K)$ համար $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n[\theta]$, ապա վերը նշված բազմությունը համընկնում է L տարածության հետ՝

$$L = \{f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\} \qquad (15)$$

Համաձայն Պնդում 14-ի, $f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n = 0$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ կգտնվի $(g_1(\theta), \dots, g_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ այնպիսի, որ $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\theta)v_i$, որտեղ v_i-ն $\mathcal{E}$ բազիսում $\mathcal{A}$ օպերատորի A մատրիցով ներկայացմանը համապատասխանող բնութագիչ մատրիցի i-րդ տողն է, այսինքն $A-\theta E$ մատրիցի i-րդ տողը: Նկատենք, որ

$$(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\theta)v_i$$

պայմանը համարժեք է

$$(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) = (g_1(\theta),\dots,g_n(\theta))(A-\theta E) \qquad (16)$$

պայմանին:

Ըստ Թեորեմ 12-ի, կգտնվեն այնպիսի չվերասերված բազմանդամային մատրիցներ P և Q (որոնց տարրերը $K[\theta]$-ից են), որ $P(A-\theta E)Q$ մատրիցը Սմիթի նորմալ տեսքի է: Քանի որ P և Q մատրիցները չվերասերված են, ապա դրանց դետերմինանտները (որոնք բազմանդամային մատրիցների դեպքում բազմանդամներ են) K դաշտի թվեր են: Իսկապես, ունենք $PP^{-1} = E \Rightarrow \det P \det P^{-1} = 1$: Ուստի, $\det P$ և $\det P^{-1}$ բազմանդամներն ունեն հակադարձ և, ուրեմն, դրանք զրո աստիճանի բազմանդամներ են, այսինքն K դաշտի ոչ զրոյական թվեր: Նույնը ճիշտ է Q-ի դեպքում: Հետևաբար, $\det P \det(A-\theta E)\det Q$ բազմանդամի աստիճանը նույնն է ինչ որ բնութագրիչ բազմանդամինը՝ $\det(A-\theta E)$-ի աստիճանը, որը հավասար է n-ի: Այստեղից ստացվում է, որ $P(A-\theta E)Q$ մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը չի պարունակում զրոյական տարրեր, քանի որ $\det P \det(A-\theta E)\det Q$-ն անկյունագծային տարրերի արտադրյալն է: Ուրեմն, $P(A-\theta E)Q$ մատրիցն ունի հետևյալ անկյունագծային տեսքը՝

$$D = P(A-\theta E)Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1(\theta) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_{n-r}(\theta) \end{pmatrix}$$

որտեղ բոլոր անկյունագծային բազմանդամները նորմավորված են, $d_{i+1}(\theta)$-ն առանց մնացորդի բաժանվում է $d_i(\theta)$-ի վրա, $i = 1,\dots,n-r-1$, և

$$\sum_{i=1}^{n-r} \deg d_i(\theta) = n \tag{17}$$

Այժմ (16)-ը կարող ենք արտագրել հետևյալ կերպ՝

$$(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) = (g_1(\theta),\dots,g_n(\theta))P^{-1}DQ^{-1}$$

Ակնհայտ է, որ կամայական $(h_1(\theta),\dots,h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ համար կգտնվի միակ $(g_1(\theta),\dots,g_n(\theta)) \in K^n[\theta]$, որ

$$(h_1(\theta),\dots,h_n(\theta)) = (g_1(\theta),\dots,g_n(\theta))P^{-1}\text{:}$$

Ուստի՝

$$K^n[\theta] = \{(g_1(\theta),\dots,g_n(\theta))P^{-1} \mid (g_1(\theta),\dots,g_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Այսպիսով, $f_1(\mathcal{A})e_1+\dots+f_n(\mathcal{A})e_n = 0$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ կգտնվի $(h_1(\theta),\dots,h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ այնպիսի, որ

$$(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) = (h_1(\theta),\dots,h_n(\theta))DQ^{-1}$$

Այսինքն, Պնդում 14-ի

$$\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E}) = \{(f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in K^n[\theta] \mid (f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = 0\}$$

բազմությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\mathcal{F}(n,\theta,\mathcal{E}) = \{(h_1(\theta),\dots,h_n(\theta))DQ^{-1} \mid (h_1(\theta),\dots,h_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Նշանակենք`

$$\mathcal{E}^* = Q^{-1}(\mathcal{A})\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix},$$

$e_i^* = q_{i1}(\mathcal{A})e_1 + \ldots + q_{in}(\mathcal{A})e_n$, որտեղ $q_{i1}(\theta), \ldots, q_{in}(\theta)$-ն Q^{-1}-ի i-րդ տողն է, $i = 1, \ldots, n$: Պարզ է, որ

$$(f_1(\mathcal{A}), \ldots, f_n(\mathcal{A}))Q\mathcal{E}^* = 0 \Leftrightarrow (f_1(\mathcal{A}), \ldots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = 0$$

և

$$\{(f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta)) \mid (f_1(\mathcal{A}), \ldots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* = 0\} =$$
$$\{(f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta))Q \mid (f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta)) \in \mathcal{F}(n, \theta, \mathcal{E})\} =$$
$$\{(h_1(\theta), \ldots, h_n(\theta))D \mid (h_1(\theta), \ldots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Ստացանք, որ`

$$(h_1(\mathcal{A}), \ldots, h_n(\mathcal{A}))D\mathcal{E}^* = 0$$

բոլոր $(h_1(\theta), \ldots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$: Ճիշտ է նաև հակառակը` եթե

$$(f_1(\mathcal{A}), \ldots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* = 0$$

որևէ $(f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ համար, ապա կգտնվի միակ $(h_1(\theta), \ldots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$, որ

$$(f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta)) = (h_1(\theta), \ldots, h_n(\theta))D:$$

Ունենք`

$$(h_1(\theta), \ldots, h_n(\theta))D = (h_1(\theta), \ldots, h_r(\theta), h_{r+1}(\theta)d_1(\theta), \ldots, h_n(\theta)d_{n-r}(\theta)),$$

ուստի`

$$(h_1(\mathcal{A}), \ldots, h_n(\mathcal{A}))D(\mathcal{A})\mathcal{E}^* =$$
$$h_1(\mathcal{A})e_1^* + \ldots + h_r(\mathcal{A})e_r^* + h_{r+1}(\mathcal{A})d_1(\mathcal{A})e_{r+1}^* + \ldots + h_n(\mathcal{A})d_{n-r}(\mathcal{A})e_n^* = 0$$

Ֆիքսելով $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, վերցնենք $h_i(\theta) \equiv 1$ և $h_j(\theta) \equiv 0$ բոլոր $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ համար: Ստանում ենք` $e_i^* = 0$ բոլոր

$i \in \{1,2,\dots,r\}$ համար և $d_i(\mathcal{A})e^*_{r+i} = 0$ բոլոր $i \in \{r+1,\dots,n\}$ համար: Ուստի, $d_1(\theta),\dots,d_{n-r}(\theta)$-ն համապատասխանաբար $e^*_{r+1},\dots,e^*_n$ տարրերի վերացնող բազմանդամներն են:

Դիցուք $f_{r+i}(\theta)$-ն e^*_{r+i} տարրի որևէ վերացնող բազմանդամ է, $i = 1,\dots,n-r$, ապա

$$(1,\dots,1,f_{r+1}(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* = 0$$

և կգտնվի $(h_1(\theta),\dots,h_n(\theta))$, որ

$$(1,\dots,1,f_{r+1}(\theta),\dots,f_n(\theta)) = (h_1(\theta),\dots,h_n(\theta))D =$$
$$(h_1(\theta),\dots,h_r(\theta),h_{r+1}(\theta)d_1(\theta),\dots,h_n(\theta)d_{n-r}(\theta))$$

Այսինքն, $h_1(\theta) = \ldots = h_r(\theta) \equiv 1$ և $f_{r+i}(\theta) = h_{r+i}(\theta)d_i(\theta)$ բոլոր $i = 1,\dots,n-r$ համար: Քանի որ $f_{r+i}(\theta)$-ն բաժանվում է $d_i(\theta)$-ի վրա առանց մնացորդի, ապա $d_i(\theta)$-ն e^*_{r+i} տարրի մինիմալ վերացնող բազմանդամն է: Նաև, քանի որ $d_{n-r}(\theta)$-ն բաժանվում է բոլոր $d_i(\theta)$-ի վրա, $d_{n-r}(\theta)$-ն վերացնող բազմանդամ է բոլոր $e^*_{r+1},\dots,e^*_n$-ի համար:

Դիտարկենք այժմ հետևյալ բազմությունը՝

$$\{(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* \mid (f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Պարզ է, որ՝

$$(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* = (f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))Q^{-1}\mathcal{E}$$

և

$$(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = (f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))Q\mathcal{E}^*,$$

ուստի՝

$$\{(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* \mid (f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\} =$$
$$\{(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} \mid (f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\} \underbrace{=}_{\text{համաձայն (15)}} L$$

Սա նշանակում է, որ L տարածության կամայական տարր կարելի է ներկայացնել $(f_1(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* = f_{r+1}(\mathcal{A})e^*_{r+1} + \ldots + f_n(\mathcal{A})e^*_n$ տեսքով:

Հիշենք, որ e տարրով ծնված ցիկլիկ ենթատարածությունը սահմանել էինք որպես $L(e) = \{g(\mathcal{A})e \mid g(\theta) \in K[\theta]\}$, հետևաբար ստացել ենք, որ

$$L = L(e_{r+1}^*) + \ldots + L(e_n^*) \tag{18}$$

Ինչպես գիտենք ցիկլիկ ենթատարածության չափը հավասար է ծնիչ տարրի մինիմալ վերացնող բազմանդամի աստիճանին, ուստի $\dim L(e_{r+i}^*) = \deg d_i(\theta)$, $i = 1, \ldots, n-r$: Համաձայն (17)-ի, $\sum_{i=1}^{n-r} \deg d_i(\theta) = n = \dim L$, ուրեմն (18)-ում գումարն ուղիղ է

$$L = L(e_{r+1}^*) \dotplus \ldots \dotplus L(e_n^*)$$

Վերը նկատել էինք, որ $d_{n-r}(\theta)$-ն վերացնող բազմանդամ է բոլոր $e_{r+1}^*, \ldots, e_n^*$-ի համար, ուստի այն վերացնող է L-ի համար՝

$$d_{n-r}(\mathcal{A})(f_{r+1}(\mathcal{A})e_{r+1}^* + \ldots + f_n(\mathcal{A})e_n^*) =$$
$$f_{r+1}(\mathcal{A})d_{n-r}(\mathcal{A})e_{r+1}^* + \ldots + f_n(\mathcal{A})d_{n-r}(\mathcal{A})e_n^* = 0$$

Այն մինիմալ վերացնողն է L-ի համար, քանի որ տարածության վերացնող բազմանդամը վերացնող է նաև e_n^*-ի համար:

Քանի որ բոլոր $d_i(\theta)$ բազմանդամները նորմավորված են, դրանց արտադրյալը նույնպես նորմավորված է և հավասար է $\det P \det(A - \theta E) \det Q$: Ուրեմն, նորմավորված է նաև $\det P \det(A - \theta E) \det Q$ բազմանդամը: Քանի որ $\det(A - \theta E)$-ի θ-ի ամենամեծ աստիճանի գործակիցը $(-1)^n$ է, ապա $\det P \det Q = \pm 1$: Հետևաբար, բնութագրիչ բազմանդամը վերացնող է ամբողջ տարածության համար և $\det(A - \mathcal{A}E)$ օպերատորը զրոյական է: Այս վերջին պնդումը հայտնի է որպես Համիլտոն-Քելիի թեորեմ:

Ամփոփենք վերը շարադրվածը հետևյալ թեորեմի տեսքով:

Թեորեմ 15.

Դիցուք $A : L \to L$ **գծային օպերատոր է և** $f(\theta)$**-ն** L**-ի մինիմալ բազմանդամն է:** L **տարածությունը կարելի է այնպես տրոհել վերջավոր քանակությամբ ցիկլիկ ենթատարածությունների՝**

$$L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \ldots \dotplus L_k,$$

որ, եթե $\psi_1(\theta), \ldots, \psi_k(\theta)$**-ն համապատասխանաբար** $L_1, \ldots, L_k$**-ի մինիմալ բազմանդամներն են, ապա** $f(\theta) = \psi_1(\theta)$ **և** $\psi_i(\theta)$**-ն բաժանվում է առանց մնացորդի** $\psi_{i+1}(\theta)$**-ի վրա,** $i = 1, 2, \ldots, k-1$**:**

Ապացույց. Վերցնենք $k = n - r$,

$$L_1 = L(e_n^*), \ldots, L_k = L(e_{r+1}^*),$$
$$\psi_1(\theta) = d_{n-r}(\theta), \ldots, \psi_k(\theta) = d_{r+1}(\theta):$$

Հետևանք.

Գծային տարածության մեջ գոյություն ունի մեկ տարր, որի մինիմալ բազմանդամը համընկնում է ամբողջ տարածության մինիմալ բազմանդամի հետ:

Ապացույց. Այդ տարրը e_n^*-ն է:

Տարածության տրոհումը ինվարիանտ ենթատարածությունների փոխադարձաբար պարզ մինիմալ բազմանդամներով

Թեորեմ 16.

Դիցուք $\mathcal{A}: L \to L$ գծային օպերատոր է, $f(\theta)$-ն L տարածության մինիմալ բազմանդամն է և $f(\theta) = \varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)$, որտեղ $\varphi_1(\theta)$-ն և $\varphi_2(\theta)$-ն նորմավորված փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ են:

Գոյություն ունի L տարածության այնպիսի $L = L_1 \dotplus L_2$ տրոհում ինվարիանտ ենթատարածությունների, որ $\varphi_1(\theta)$-ն L_1 և $\varphi_2(\theta)$-ն L_2 ենթատարածությունների մինիմալ բազմանդամներն են:

Ապացույց. Համաձայն Էվքլիդեսի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար գտնելու ալգորիթմի, կգտնվեն $\psi_1(\theta)$ և $\psi_2(\theta)$ բազմանդամներ, որ

$$1 = \varphi_1(\theta)\psi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\psi_2(\theta) \qquad (19)$$

Նշանակենք, $\mathcal{B}_1 = \varphi_2(\mathcal{A})\psi_2(\mathcal{A})$ և $\mathcal{B}_2 = \varphi_1(\mathcal{A})\psi_1(\mathcal{A})$: (19)-ից անմիջապես ստանում ենք, որ

$$\mathcal{I} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2, \qquad (20)$$

որտեղ $\mathcal{I}$-ն միավոր օպերատորն է:

Դիցուք $x \in L$, կիրառենք հաջորդաբար $\mathcal{B}_1$ և $\mathcal{B}_2$ օպերատորները՝

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2x) = \varphi_2(\mathcal{A})\psi_2(\mathcal{A})(\varphi_1(\mathcal{A})\psi_1(\mathcal{A}))x =$$
$$\psi_1(\mathcal{A})\psi_2(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})x = \psi_1(\mathcal{A})\psi_2(\mathcal{A})f(\mathcal{A})x = 0$$

քանի որ $f(\theta)$-ն տարածության մինիմալ բազմանդամն է: Նույն ձևով ստանում ենք՝ $\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1x) = 0$ և ուրեմն՝

$$\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2\mathcal{B}_1 = 0 \tag{21}$$

Բազմապատկենք (20)-ի աջ և ձախ մասերը $\mathcal{B}_1$-ով, կստանանք $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^2 + \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ և հաշվի առնելով (21)-ը՝ $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^2$: Պարզ է, որ նույն կերպ կստանանք $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2^2$, ուստի

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \mathcal{B}_1^2 \\ \mathcal{B}_2 &= \mathcal{B}_2^2 \end{aligned} \tag{22}$$

Եթե $y \in \operatorname{Im}\mathcal{B}_1$, ապա կգտնվի $x \in L$, որ $\mathcal{B}_1x = y$, ուրեմն

$$\mathcal{B}_1y = \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1x) = \mathcal{B}_1^2x \underbrace{=}_{\text{համաձայն (22)}} \mathcal{B}_1x = y$$

և $\mathcal{B}_1$ օպերատորը գործում է $\operatorname{Im}\mathcal{B}_1$ վրա որպես միավոր օպերատոր:

Եթե $y \in \operatorname{Im}\mathcal{B}_2$, ապա կգտնվի $x \in L$, որ $\mathcal{B}_2x = y$ և

$$\mathcal{B}_1y = \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2x) = (\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)x \underbrace{=}_{\text{համաձայն (21)}} 0:$$

Այսպիսով $\mathcal{B}_1$ և $\mathcal{B}_2$ օպերատորները գործում են իրենց պատկերների վրա որպես միավոր օպերատորներ, իսկ միմյանց պատկերների վրա՝ որպես զրոյական օպերատորներ:

Սահմանենք՝ $L_1 = \operatorname{Im}\mathcal{B}_1$ և $L_2 = \operatorname{Im}\mathcal{B}_2$: Նախ ստուգենք, որ $L = L_1 + L_2$: Եթե $x \in L$, ապա կիրառելով (20)-ը ստանում ենք՝ $x = \mathcal{I}x = \mathcal{B}_1x + \mathcal{B}_2x$, որտեղ ակնհայտորեն $\mathcal{B}_1x \in L_1$, իսկ $\mathcal{B}_2x \in L_2$: Համոզվենք այժմ, որ գումարն ուղիղ է: Դիցուք $y \in L_1 \cap L_2$: Կգտնվեն x_1 և x_2 այնպիսի, որ $\mathcal{B}_1x_1 = y = \mathcal{B}_2x_2$: Կիրառենք $\mathcal{B}_1$ օպերատորը՝

$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1x_1) = \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2x_2)$։ Ունենք՝ $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1x_1) = \mathcal{B}_1^2x_1 = \mathcal{B}_1x_1$ և $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2x_2) = (\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)x_2 = 0$։ Ուստի՝ $y = \mathcal{B}_1x_1 = 0$ և $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, հետևաբար ենթատարածությունների գումարն ուղիղ է։

Համոզվենք, որ L_1 և L_2 ենթատարածություններն ինվարիանտ են։ Դիցուք $y \in L_1 = \mathrm{Im}\,\mathcal{B}_1$։ Կգտնվի $x \in L$, որ $\mathcal{B}_1x = y$։ Ուրեմն՝

$$\mathcal{A}y = \mathcal{A}\mathcal{B}_1x \underbrace{=}_{\text{քանի որ } \mathcal{B}_1\text{-ը բազմանդամ է } \mathcal{A}\text{-ից}} \mathcal{B}_1\mathcal{A}x \in \mathrm{Im}\,\mathcal{B}_1 = L_1\text{։}$$

Նմանապես ստացվում է L_2-ի ինվարիանտ լինելը։

Մնաց ապացուցենք, որ $\varphi_1(\theta)$-ն L_1 և $\varphi_2(\theta)$-ն L_2 ենթատարածությունների մինիմալ բազմանդամներն են։

Դիցուք $y \in L_1 = \mathrm{Im}\,\mathcal{B}_1$։ Կգտնվի $x \in L$, որ $\mathcal{B}_1x = y$ ։ Կիրառենք $\varphi_1(\mathcal{A})$-ն y-ին՝

$$\varphi_1(\mathcal{A})y = \varphi_1(\mathcal{A})\mathcal{B}_1x = \varphi_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})\psi_2(\mathcal{A})x =$$
$$\psi_2(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})x = \psi_2(\mathcal{A})f(\mathcal{A})x = 0$$

Ուրեմն, $\varphi_1(\theta)$-ն L_1-ի վերացնող բազմանդամ է։ Նույն ձևով ստացվում է, որ $\varphi_2(\theta)$-ն L_2-ի վերացնող բազմանդամ է։

Դիցուք $\tilde{\varphi}_1(\theta)$-ն L_1-ի վերացնող բազմանդամ է։ Դյուրին է ստուգել, որ $\tilde{\varphi}_1(\theta)\varphi_2(\theta)$-ն հանդիսանում է L տարածության վերացնող բազմանդամ։ Եթե $x \in L$, ապա $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ և

$$\tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})x = \tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})(x_1 + x_2) =$$
$$\varphi_2(\mathcal{A})\tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})x_1 + \tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})x_2 = 0,$$

քանի որ $\tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})x_1 = 0$ և $\varphi_2(\mathcal{A})x_2$։ Սակայն $f(\theta)$-ն տարածության մինիմալ բազմանդամն է, ուստի $\tilde{\varphi}_1(\theta)\varphi_2(\theta)$-ն բաժանվում է առանց մնացորդի $f(\theta)$-ի վրա՝

$$\tilde{\varphi}_1(\theta)\varphi_2(\theta) = \varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)\phi(\theta)$$

և

$$(\tilde{\varphi}_1(\theta) - \varphi_1(\theta)\phi(\theta))\varphi_2(\theta) = 0:$$

Քանի որ $\varphi_2(\theta)$ զրոյական չէ, ապա $\tilde{\varphi}_1(\theta) = \varphi_1(\theta)\phi(\theta)$ և $\tilde{\varphi}_1(\theta)$-ն բաժանվում է առանց մնացորդի $\varphi_1(\theta)$-ի վրա: Ուստի, $\varphi_1(\theta)$-ն L_1-ի մինիմալ բազմանդամն է: Նմանապես $\varphi_2(\theta)$-ն L_2-ի մինիմալ բազմանդամն է: Թեորեմն ապացուցված է:

Տարածության տրոհումը ցիկլիկ ենթատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամներն անվերածելի բազմանդամների աստիճաններ են

Թեորեմ 17.

Գծային տարածությունը ցիկլիկ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ նրա մինիմալ բազմանդամի աստիճանը հավասար է նրա չափին:

Ապացույց. Դիցուք մինիմալ բազմանդամի աստիճանը m է, իսկ տարածության չափը՝ n:

Եթե $m = n$, ապա $e, \mathcal{A}e, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}e$ համակարգը (որտեղ e-ն այն տարրն է, որի մինիմալ բազմանդամը դա տարածության մինիմալ բազմանդամն է) տարածության բազիսն է: Ուստի, տարածությունը ցիկլիկ է:

Եթե տարածությունը ցիկլիկ է, ապա այն ունի ծնիչ՝ e և $e, \mathcal{A}e, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}e$ համակարգը տարածության բազիսն է: Պարզ է, որ e-ի մինիմալ բազմանդամի աստիճանը առնվազն n է: Մյուս կողմից ակնհայտ է, որ տարրի մինիմալ բազմանդամի աստիճանը տարածության չափից մեծ չէ, ուրեմն՝ $n = m$:

Հետևանք.

Եթե $f(\theta)$-ն ցիկլիկ n-չափանի գծային տարածության մինիմալ բազմանդամն է, ապա օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամը հավասար է $(-1)^n f(\theta)$:

Ապացույց. Համաձայն Թեորեմ 17-ի, $\deg f(\theta) = n$: Մյուս կողմից, եթե համաձայն Թեորեմ 15-ի տրոհենք տարածությունը ցիկլիկ ենթատարածությունների՝ $L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \ldots \dotplus L_k$, ապա կստանանք, որ այդ տարածությունների մինիմալ բազմանդամների արտադրյալը՝ $\psi_1(\theta)\ldots\psi_k(\theta)$ հավասար է $(-1)^n$ գործակցի ճշտությամբ բնութագրիչ բազմանդամին: Քանի որ այդ մինիմալ բազմանդամների մեջ է նաև տարածության մինիմալ բազմանդամը՝ $\psi_1(\theta) = f(\theta)$, որի աստիճանը հավասար է վերը նշված արտադրյալի աստիճանին, ապա, բացի $f(\theta)$-ից, մնացած բազմանդամները հաստատուն են և համապատասխան ենթատարածությունները զրոյական են: Այսինքն՝ $k = 1, L = L_1$ և

$$(-1)^n \psi_1(\theta)\ldots\psi_k(\theta) = (-1)^n f(\theta):$$

Թեորեմ 18.

Եթե գծային տարածությունը ցիկլիկ է և տրոհված է ենթատարածությունների, ապա այդ ենթատարածությունները ևս ցիկլիկ են և նրանց մինիմալ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են:

Փոխադարձաբար պարզ մինիմալ բազմանդամներով ցիկլիկ ենթատարածությունների ուղիղ գումարը ցիկլիկ ենթատարածություն է:

Ապացույց. Նախ ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Դիցուք L ցիկլիկ տարածությունը տրոհված է ենթատարածությունների

$L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \ldots \dotplus L_k$, $\dim L = n$, $\dim L_i = n_i$, $i = 1,2,\ldots,k$։

Նշանակենք $\psi(\theta)$-ով L-ի մինիմալ բազմանդամը, $\deg\psi(\theta) = m$, և $\psi_i(\theta)$-ով L_i-ի մինիմալ բազմանդամը, $\deg\psi_i(\theta) = m_i$, $i = 1,2,\ldots,k$։ Պարզ է, որ՝

$$m \le n \text{ և } m_i \le n_i,\ i = 1,2,\ldots,k \qquad (23)$$

Դյուրին է համոզվել, որ $\psi(\theta)$-ն $\psi_1(\theta),\ldots,\psi_k(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է։ Իսկապես, $\psi(\theta)$-ն պետք է բաժանվի յուրաքանչյուր $\psi_i(\theta)$-ի վրա և բոլոր բազմանդամները նորմավորված են, ուստի տարածության մինիմալ բազմանդամը $\psi_1(\theta),\ldots,\psi_k(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է։ Որեմն՝ $m \le m_1 + \ldots + m_k$ և $m = m_1 + \ldots + m_k$ միայն այն դեպքում, երբ $\psi_1(\theta),\ldots,\psi_k(\theta)$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են։

Պարզ է, որ՝

$$m \le m_1 + \ldots + m_k \le n_1 + \ldots + n_k = n \qquad (24)$$

Քանի որ L-ը ցիկլիկ է, ապա $m = n$ և (24)-ում բոլոր տեղերում հավասարություն տեղի ունի։ (23)-ից հետևում է, որ $m_i = n_i$, $i = 1,2,\ldots,k$, ուստի բոլոր L_i-րը ցիկլիկ են և $\psi_1(\theta),\ldots,\psi_k(\theta)$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են։

Ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը։ Ունենք՝ $m_i = n_i$, $i = 1,2,\ldots,k$ և $m = m_1 + \ldots + m_k$, ուստի՝

$$m = m_1 + \ldots + m_k = n_1 + \ldots + n_k = n$$

և տարածությունը ցիկլիկ է։

Թեորեմ 19.

Տարածությունը չի կարելի տրոհել ինվարիանտ ենթատարածությունների միայն և միայն այն դեպքում,

երբ այն ցիկլիկ է և նրա մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան է:

Ապացույց. *Եթե տարածությունը ցիկլիկ է, նրա մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան է և տարածությունը տրոհված է ենթատարածությունների, որոնց քանակը մեկից ավելին է, ապա համաձայն Թեորեմ 18-ի այդ ենթատարածությունների մինիմալ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են և տարածության մինիմալ բազմանդամը այդ փոխադարձաբար պարզ բազմանդամների արտադրյալն է: Սա հակասում է այն բանին, որ տարածության մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան է:*

Եթե տարածության մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան չէ, ապա այն առնվազն երկու փոխադարձաբար պարզ բազմանդամների արտադրյալ է: Այդ դեպքում տարածությունը կարելի է տրոհել ինվարիանտ տարածությունների՝ համաձայն Թեորեմ 16-ի:

Եթե տարածությունը ցիկլիկ չէ, ապա այն կարելի է տրոհել մեկից ավելի ցիկլիկ ենթատարածությունների՝ ըստ Թեորեմ 15-ի: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիցուք L *գծային տարածությունը տրոհված է ցիկլիկ ենթատարածությունների համաձայն Թեորեմ 15-ի՝* $L = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_k$, $\psi_1(\theta), \ldots, \psi_k(\theta)$ *բազմանդամները համապատասխան մինիմալ բազմանդամներն են, որոնց համար* $\psi_{i+1}(\theta)$*-ն* $\psi_i(\theta)$*-ի բաժանարարն է,* $i = 1, 2, \ldots, k-1$*: Վերածենք այդ բազմանդամները անվերածելի արտադրիչների՝*

$$\psi_1(\theta) = \varphi_1^{\alpha_1}(\theta)\varphi_2^{\alpha_2}(\theta)\ldots\varphi_p^{\alpha_p}(\theta)$$
$$\psi_2(\theta) = \varphi_1^{\beta_1}(\theta)\varphi_2^{\beta_2}(\theta)\ldots\varphi_p^{\beta_p}(\theta)$$
$$\vdots$$
$$\psi_k(\theta) = \varphi_1^{\varepsilon_1}(\theta)\varphi_2^{\varepsilon_2}(\theta)\ldots\varphi_p^{\varepsilon_p}(\theta)$$
$$\alpha_j \geq \beta_j \geq \ldots \geq \varepsilon_j,\ j = 1,2,\ldots,p$$

Այժմ համաձայն **Թեորեմ 16**-*ի կտրոհենք L_1-ը ինվարիանտ ենթատարածությունների, որոնք կլինեն ցիկլիկ և նրանց մինիմալ բազմանդամները կլինեն $\varphi_1^{\alpha_1}(\theta)$-ը, $\varphi_2^{\alpha_2}(\theta)$-ը ...$\varphi_p^{\alpha_p}(\theta)$-ը: Նման ձևով կտրոհենք մնացած L_i-երը և L տարածությունը կտրոհվի ցիկլիկ ենթատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամները կլինեն անվերածելի բազմանդամների աստիճաններ: Այսպիսով ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը.*

Թեորեմ 20.

Գծային տարածությունը միշտ կարելի է տրոհել ցիկլիկ ենթատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամները կլինեն անվերածելի բազմանդամների աստիճաններ:

Գծային օպերատորի մատրիցի նորմալ տեսքը

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է և L-ը տրոհված է ինվարիանտ ենթատարածությունների՝ $L = L_1 \dotplus \ldots \dotplus L_k$, $\dim L_i = n_i$, $i = 1,2,\ldots,k$,

$$\dim L = n = \sum_{i=1}^{k} n_i \text{։}$$

Եթե $\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_k$-ն համապատասխանաբար $L_1,\ldots,L_k$ ենթատարածությունների բազիսների տարրերից կազմված սյուներն են, ապա՝

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_k \end{pmatrix}$$

ամբողջ L տարածության բազիս է։ Ինչպես գիտենք, $\mathcal{A}$ օպերտորի ներկայացումը $\mathcal{E}$ բազիսում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} \tag{25}$$

այսինքն օպերատորի մատրիցը տրոհված է բլոկերի որոնք, բացի անկյունագծային բլոկերից, զրոյական են, իսկ անկյունագծայինները $n_1,n_2,\ldots,n_k$ չափանի $A_1,A_2,\ldots,A_k$ մատրիցներ են՝ $\mathcal{A}$ օպերտորի ներկայացումները $\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_k$ բազիսներում համապատասխանաբար։

Դիցուք L-ը տրոհված է ցիկլիկ ենթատարածությունների ըստ Թեորեմ 15-ի

$$L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \ldots \dotplus L_k$$

և $\psi_1(\theta),\ldots,\psi_k(\theta)$-ն համապատասխանաբար $L_1,\ldots,L_k$-ի մինիմալ բազմանդամներն են: Նկարագրենք (**25**) ներկայացման i-րդ անկյունագծային բլոկը, այսինքն A_i մատրիցը: L_i ենթատարածության մեջ ընտրենք e տարրը, որի մինիմալ բազմանդամը համընկնում է $\psi_i(\theta)$-ի հետ: Դիցուք $\psi_i(\theta) = \theta^{n_i} + \alpha_{i1}\theta^{n_i-1} + \ldots + \alpha_{in_i-1}\theta + \alpha_{in_i}$: Պարզ է, որ $e, \mathcal{A}e, \ldots, \mathcal{A}^{n_i-1}e$ համակարգը L_i-ի բազիսն է և՝

$$\mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} e \\ \mathcal{A}e \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{n_i-1}e \end{pmatrix}:$$

Պարզ է նաև, որ՝

$$\mathcal{A}^{n_i}e = -\alpha_{i1}\mathcal{A}^{n_i-1}e - \ldots - \alpha_{in_i-1}\mathcal{A}e - \alpha_{in_i}e:$$

Այժմ գտնենք օպերատորի ներկայացումը $\mathcal{E}_i$ բազիսում, այսինքն կառուցենք A_i մատրիցը այնպես, որ $\mathcal{A}\mathcal{E}_i = A_i\mathcal{E}_i$: Դյուրին է ստուգել, որ՝

$$
\mathcal{A}\mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{A}e \\ \mathcal{A}^2 e \\ \mathcal{A}^3 e \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{n_i-1} e \\ \mathcal{A}^{n_i} e \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
-\alpha_{in_i} & -\alpha_{in_i-1} & -\alpha_{in_i-2} & -\alpha_{in_i-3} & \dots & -\alpha_{i1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} e \\ \mathcal{A}e \\ \mathcal{A}^2 e \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{n_i-2} e \\ \mathcal{A}^{n_i-1} e \end{pmatrix}
$$

և՝

$$
A_i = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
-\alpha_{in_i} & -\alpha_{in_i-1} & -\alpha_{in_i-2} & -\alpha_{in_i-3} & \dots & -\alpha_{i1}
\end{pmatrix} \tag{26}
$$

Այսպիսով՝

$$
\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_k \end{pmatrix}
$$

բազիսում օպերատորի մատրիցի անկյունագծային բլոկերն (26) տեսքի են: Այս դեպքում ասում են, որ մատրիցը բերված է առաջին բնական նորմալ տեսքի։ Մատրիցի առաջին բնական նորմալ տեսքը միակն է անկյունագծային բլոկերի տեղափոխության ճշտությամբ։ Դա անմիջապես բխում է բնութագրիչ մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքի միակությունից (Թեորեմ 13), որից հետևում է $\psi_1(\theta), \ldots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամների (ինվարիանտ գործակիցների) միակությունը։

Համաձայն Թեորեմ 17-ի հետևանքի, A_i մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը հավասար է

$$\det(A_i - \theta E) = (-1)^{n_i}\psi_i(\theta)։$$

Ինչպես գիտենք, նաև՝

$$\det(A - \theta E) = \prod_{i=1}^{k}(-1)^{n_i}\psi_i(\theta) = (-1)^{n}\psi_1(\theta)\ldots\psi_k(\theta)։$$

Նման ձևով, օգտվելով տարածության տրոհումից, ըստ Թեորեմ 20-ի, կստանանք մատրիցների ներկայացման **երկրորդ բնական նորմալ տեսքը**։

Մատրիցի առաջին կամ երկրորդ բնական տեսքերը կառուցելու համար բավական է Սմիթի նորմալ տեսքի բերել օպերատորի բնութագրիչ մատրիցը և ստանալ ինվարիանտ գործակիցները՝ $\psi_1(\theta), \ldots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամները։

Մատրիցի Ժորդանյան նորմալ տեսքը

Այժմ ենթադրենք, որ K դաշտը, որի նկատմամբ կառուցված է L գծային տարածությունը կոմպլեքս թվերի դաշտն է, այսինքն՝ $K = \mathbb{C}$:

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է և L գծային տարածությունը տրոհված է ցիկլիկ ենթատարածությունների, համաձայն **Թեորեմ 15**-ի՝ $L = L_1 \dotplus \ldots \dotplus L_k$, $\psi_1(\theta), \ldots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամները համապատասխան մինիմալ բազմանդամներն են, որոնց համար $\psi_{i+1}(\theta)$-ն $\psi_i(\theta)$-ի բաժանարարն է, $i = 1, 2, \ldots, k-1$: Վերածենք այդ բազմանդամները անվերածելի արտադրիչների, որոնք կլինեն գծային, քանի որ կոմպլեքս դաշտում բոլոր բազմանդամները վերլուծվում են գծային արտադրիչների՝

$$\psi_1(\theta) = (\theta - \lambda_1)^{\alpha_1}(\theta - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (\theta - \lambda_p)^{\alpha_p}$$
$$\psi_2(\theta) = (\theta - \lambda_1)^{\beta_1}(\theta - \lambda_2)^{\beta_2} \ldots (\theta - \lambda_p)^{\beta_p}$$
$$\vdots$$
$$\psi_k(\theta) = (\theta - \lambda_1)^{\varepsilon_1}(\theta - \lambda_2)^{\varepsilon_2} \ldots (\theta - \lambda_p)^{\varepsilon_p}$$
$$\alpha_j \ge \beta_j \ge \ldots \ge \varepsilon_j,\ j = 1, 2, \ldots, p$$

Այժմ, համաձայն **Թեորեմ 16**-ի, կտրոհենք L_1-ը ինվարիանտ ենթատարածությունների, որոնք կլինեն ցիկլիկ և նրանց մինիմալ բազմանդամները կլինեն $(\theta - \lambda_1)^{\alpha_1}$-ը, $(\theta - \lambda_2)^{\alpha_2}$-ը, ...,$(\theta - \lambda_p)^{\alpha_p}$-ը: Նման ձևով կտրոհենք մնացած L_i-ները և L տարածությունը կտրոհվի ցիկլիկ ենթատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամները կլինեն անվերածելի բազմանդամների աստիճաններ:

Այսպիսով, կստանանք $\mathcal{A}$ օպերատորի մատրիցը երկրորդ բնական նորմալ տեսքով: Փորձենք ավելի պարզեցնել այդ մատրիցի տեսքը:

Փաստորեն մենք ունենք L տարածության մի տրոհում ցիկլիկ ենթատարածությունների $L = L_1 \dotplus \ldots \dotplus L_m$, այնպիսին, որ ամեն մի L_i-ի *մինիմալ բազմանդամն ունի հետևյալ տեսքը՝* $(\theta-\lambda)^s$, *որտեղ* $\lambda \in K$։ *Դիցուք* e-*ն* L_i-*ի այն տարրն է, որի մինիմալ բազմանդամը* $(\theta-\lambda)^s$-*ն է*։ *Կառուցենք* L_i-*ի հետևյալ բազիսը՝* $e, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})e, \ldots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{s-1}e$։ *Սա իսկապես բազիս է, քանի որ գծորեն անկախ համակարգ է (հակառակ դեպքում կստանայինք* s-*ից փոքր աստիճանի վերացնող բազմանդամ)*։ *Նշանակենք* $e_1=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{s-1}e$, $e_2=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{s-2}e, \ldots, e_{s-1}=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})e$, $e_s=e$ *և*

$$\mathcal{E}_i=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_s \end{pmatrix}։$$

Պարզ է, որ $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})e_1=0$ *և* $\mathcal{A}e_1=\lambda e_1$, $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})e_2=e_1$ *և* $\mathcal{A}e_2=\lambda e_2+e_1, \ldots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})e_s=e_{s-1}$ *և* $\mathcal{A}e_s=\lambda e_s+e_{s-1}$։ *Որեմն՝*

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_i=\begin{pmatrix} \mathcal{A}e_1 \\ \mathcal{A}e_2 \\ \mathcal{A}e_3 \\ \vdots \\ \mathcal{A}e_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ \lambda e_2+e_1 \\ \lambda e_3+e_2 \\ \vdots \\ \lambda e_s+e_{s-1} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_s \end{pmatrix}=A_i\mathcal{E}_i$$

Այսինքն, $\mathcal{E}_i$ *բազիսում մատրիցի բոլոր անկյունագծային տարրերը հավասար են* λ-*ի, անկյունագծին զուգահեռ ներքևի շարքի տարրերը մեկեր են, իսկ մնացած տարրերը՝ զրոներ*։ *Այսպիսի մատրիցը կոչվում* է λ սեփական արժեքին համապատասխանող s-րդ **կարգի Ժորդանյան վանդակ** (մատրիցի տեսքից անմիջապես երևում է, որ λ-ն սեփական արժեք է)։ Մենք արդեն ստացել էինք, որ $\det(A-\lambda E)=(-1)^n\psi_1(\lambda)\ldots\psi_k(\lambda)$, ուստի $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ թվերը A օպերատորի բոլոր սեփական արժեքներն են և λ_i-ի պատիկությունը հավասար է

$$\alpha_i+\beta_i+\ldots+\varepsilon_i=m_i,\ i=1,2,\ldots,p$$

և

$$\sum_{i=1}^{p} m_i=n=\dim L։$$

Ամեն մի λ_i-ի A մատրիցում կհամապատասխանի մեկ α_i-րդ կարգի Ժորդանյան վանդակ, մեկ β_i-րդ կարգի Ժորդանյան վանդակ ... մեկ ε_i-րդ կարգի Ժորդանյան վանդակ։ Բոլոր λ_i-ին համապատասխանող վանդակների կարգերի գումարը կլինի հավասար m_i։

Վերը նկարագրված Ժորդանյան վանդակներից բաղկացած մատրիցը կոչվում է **Ժորդանյան նորմալ ձևի** մատրից։ Այսինքն, կամայական A մատրից կոմպլեքս թվերի դաշտում բերվում է Ժորդանյան նորմալ տեսքի՝ կգտնվի T չվերասերված անցման մատրից՝ այնպիսին, որ $T^{-1}AT$-ն Ժորդանյան նորմալ տեսքի է։

Մատրիցի Ժորդանյան նորմալ տեսքը միակն է վանդակների տեղափոխության ճշտությամբ։ Դա անմիջապես հետևում է ինվարիանտ գործակիցների և տարածության մինիմալ բազմանդամի միակությունից։

Նկատենք, որ s-րդ կարգի Ժորդանյան վանդակը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\lambda E_s + H_s$$

որտեղ E_s-ը միավոր s չափանի մատրիցն է, իսկ H_s-ը այսպես կոչված "տեղաշարժի" s չափանի մատրիցն է՝

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Դյուրին է ստուգել, որ H_s^2 մատրիցում մեկերի շարքը տեղաշարժված է մի շարք ներքև H_s-ի համեմատ, H_s^3-ում՝ երկու շարք և այլն: Հետևաբար՝

$$rank(H_s^p) = \begin{cases} s-p, \text{ երբ } 0 < p \le s \\ 0, \text{ երբ } p > s \end{cases} :$$

Սահմանում: $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատորի միջուկի չափը կոչվում է օպերատորի **դեֆեկտ** և նշանակվում է՝ $def\mathcal{A}$:

Պարզ է, որ $def\mathcal{A} = \dim L - rank\mathcal{A}$ (տես **Թեորեմ 6**-ը): Քանի որ օպերատորի ռանգը համընկնում է օպերատորը ներկայացնող մատրիցի ռանգի հետ, ապա կարող ենք սահմանել նաև n-չափանի A մատրիցի դեֆեկտը որպես՝

$$defA = n - rankA:$$

Տեղաշարժի մատրիցի համար կստանանք՝

$$def(H_s^p) = \begin{cases} p, \text{ երբ } 0 \le p \le s \\ s, \text{ երբ } p > s \end{cases} \; :$$

Դիցուք $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատորը ներկայացված է A մատրիցով, $\dim L = n$ և $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$-ը օպերատորի բոլոր սեփական արժեքներն են, որոնց պատիկությունները համապատասխանաբար $k_1, \ldots, k_m$ թվերն են: Պարզ է, որ $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$:

Նշանակենք $d_s^{(p)}$-ով $def(A - \lambda_s E)^p$-ն, $\mu_s^{(p)}$-ով λ_s սեփական արժեքին համապատասխանող p-չափանի Ժորդանյան վանդակների քանակը A-ի Ժորդանյան նորմալ ձևի մատրիցում և, վերջապես, μ_s-ով λ_s սեփական արժեքին համապատասխանող բոլոր Ժորդանյան վանդակների քանակը A-ի Ժորդանյան նորմալ ձևի մատրիցում: Ակնհայտ է, որ $\mu_s = \sum_{p=1}^{k_s} \mu_s^{(p)}$ և $d_s^{(0)} = 0$:

Թեորեմ 21.

$$\mu_s^{(m)} = 2d_s^{(m)} - d_s^{(m+1)} - d_s^{(m-1)}$$

Ապացույց. Հաշվենք $(A - \lambda_s E)^m$ մատրիցի դեֆեկտը երբ $m > 0$: Նշանակենք J-ով A մատրիցի Ժորդանյան տեսքի մատրիցը: Ուստի, գոյություն ունի T անցման մատրիցը, որի համար $J = T^{-1}AT$: Հետևաբար, $J - \lambda_s E = T^{-1}(A - \lambda_s E)T$ և $(J - \lambda_s E)^m = T^{-1}(A - \lambda_s E)^m T$: Թեորեմ 8-ից ստանում ենք, որ $def(J - \lambda_s E)^m = def(A - \lambda_s E)^m$: Ուստի, $d_s^{(m)} = def(J - \lambda_s E)^m$: Դյուրին է համոզվել, որ $(J - \lambda_s E)^m$ մատրիցի դեֆեկտը հավասար է նրա անկյունագծային բլոկերի՝ Ժորդանյան վանդակների դեֆեկտների գումարին, իսկ անկյունագծային բլոկերը $J - \lambda_s E$-ի անկյունագծային բլոկերի m-րդ աստիճաններն են: Ամեն մի Ժորդանյան վանդակ $J-\lambda_s E$ մատրիցում, որը համապատասխանում է որևէ λ_i սեփական արժեքի ունի հետևյալ տեսքը

$$\begin{pmatrix} \lambda_i-\lambda_s & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i-\lambda_s & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_i-\lambda_s \end{pmatrix}$$

ուստի, երբ $i \neq s$ այդ վանդակի դեֆեկտը զրո է, իսկ $i = s$ դեպքում այդ վանդակը համընկնում է համապատասխան տեղաշարժի H մատրիցի հետ: Եթե նշանակենք $p_1,\ldots,p_{\mu_s}$-ով λ_s-ին համապատասխանող Ժորդանյան վանդակների չափերը J մատրիցում, ապա $\sum_{i=1}^{\mu_s} p_i = k_s$ և

$$d_s^{(m)} = def(J-\lambda_s E)^m = \sum_{i=1}^{\mu_s} defH_{p_i}^m$$

Գիտենք, որ՝

$$def(H_f^g) = \begin{cases} g, \text{ երբ } 0 \le g \le f \\ f, \text{ երբ } g > f \end{cases} :$$

Ուստի, եթե $g \geq 1$, ապա՝

$$defH_{p_i}^g = \begin{cases} defH_{p_i}^{g-1}+1, \text{ երբ } 0 \le g-1 < p_i \\ defH_{p_i}^{g-1}, \text{ երբ } g-1 \ge p_i \end{cases}$$

և

$$d_s^{(g)} = \sum_{i=1}^{\mu_s} defH_{p_i}^{g} = \sum_{i=1}^{\mu_s} defH_{p_i}^{g-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ 0\le g-1<j}}^{\mu_s} \mu_s^{(j)} = d_s^{(g-1)} + \mu_s - \sum_{i=1}^{g-1} \mu_s^{(i)} \qquad (27)$$

Տեղադրենք (27)-ի մեջ $g = m+1$ և $g = m$, կստանանք՝

$$d_s^{(m+1)} = d_s^{(m)} + \mu_s - \sum_{i=1}^{m} \mu_s^{(i)}$$

$$d_s^{(m)} = d_s^{(m-1)} + \mu_s - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_s^{(i)}$$

Երկրորդ հավասարումից հանենք առաջինը և կստանանք թեորեմի պնդումը: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, Թեորեմ 21-ի օգնությամբ կարելի է կառուցել A մատրիցի Ժորդանյան վանդակները և, ուստի, Ժորդանյան նորմալ ձևը (իհարկե, եթե գտնված են բոլոր սեփական արժեքները և նրանց պատիկությունները): Եթե հարկավոր է գտնել նաև Ժորդանյան բազիսին անցման մատրիցը՝ T-ն, ապա այն գտնվում է $TJ = AT$ պայմանից, որն իրենից ներկայացնում է գծային հավասարումների համակարգ, եթե T մատրիցի տարրերը դիտարկենք որպես անհայտներ:

Օրինակ

Կառուցենք հետևյալ մատրիցի Ժորդանյան նորմալ տեսքը, կառուցելով դրա բնութագրիչ մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Կառուցենք մատրիցի բնութագրիչ մատրիցը՝

$$A - \theta E = \begin{pmatrix} 2-\theta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\theta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\theta & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\theta \end{pmatrix}$$

և համաձայն Թեորեմ 11-ի Սմիթի նորմալ տեսքը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\theta-1)^2(\theta-2) \end{pmatrix}$$

Հետևաբար, ինվարիանտ գործակիցներն են՝ $\psi_1(\theta) = (\theta-1)^2(\theta-2)$ *և* $\psi_2(\theta) = (\theta-1)$*: Այս բազմանդամների յուրաքանչյուր անվերածելի (տվյալ դեպքում գծային) արտադրիչին համապատասխանում է մեկ Ժորդանյան վանդակ՝* $(\theta-1)^2$*-ին* $\lambda = 1$ *սեփական արժեքին համապատասխանող մեկ հատ* 2*-չափանի վանդակ,* $(\theta-2)$*-ին՝* $\lambda = 2$ *սեփական արժեքին համապատասխանող մեկ հատ* 1*-չափանի վանդակ և* $(\theta-1)$*-ին* $\lambda = 1$ *սեփական արժեքին համապատասխանող մեկ հատ* 1*-չափանի վանդակ: Ուստի, մատրիցի Ժորդանյան նորմալ տեսքը հետևյալն է՝*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Կառուցենք այժմ նույն մատրիցի Ժորդանյան նորմալ տեսքը, օգտվելով Թեորեմ **21**-ի $\mu_s^{(m)} = 2d_s^{(m)} - d_s^{(m+1)} - d_s^{(m-1)}$ բանաձևից: Տեսանք, որ մատրիցի սեփական արժեքներն են՝ $\lambda = 1$, որի պատիկությունը հավասար է 3-ի և $\lambda = 2$, որի պատիկությունը հավասար է 1-ի:

Կազմենք $A - E$ մատրիցը և հաշվենք դրա աստիճանները՝

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - E)^2 = (A - E)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Դյուրին է տեսնել, որ՝

$$rank(A - E) = 2$$

և

$$rank(A - E)^2 = (A - E)^3 = 1,$$

ուստի՝ $d^{(1)} = 4 - 2 = 2$, $d^{(2)} = d^{(3)} = 4 - 1 = 3$: Ստանում ենք, որ՝

$$\mu^{(1)} = 2d^{(1)} - d^{(0)} - d^{(2)} = 2 \times 2 - 0 - 3 = 1$$

և

$$\mu^{(2)} = 2d^{(2)} - d^{(1)} - d^{(3)} = 2\times 3 - 2 - 3 = 1:$$

Քանի որ $\mu^{(1)} + 2\mu^{(2)} = 1 + 2 = 3$ հավասար է $\lambda = 1$-ի պատիկությանը, ապա Ժորդանյան նորմալ տեսքում կան $\lambda = 1$ սեփական արժեքին համապատասխանող մեկ հատ 1-չափանի վանդակ և մեկ հատ 2-չափանի վանդակ:

Կազմենք $A-2E$ մատրիցը և հաշվենք դրա աստիճանները՝

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Պարզ է, որ՝

$$rank(A-2E) = 3$$

և

$$rank(A-2E)^2 = 3,$$

ուստի $d^{(1)} = 4 - 3 = 1$, $d^{(2)} = 4 - 3 = 1$: Ստանում ենք, որ՝

$$\mu^{(1)} = 2d^{(1)} - d^{(0)} - d^{(2)} = 2\times 1 - 0 - 1 = 1$$

և

$$\mu^{(2)} = 2d^{(2)} - d^{(1)} - d^{(3)} = 2\times 1 - 1 - 1 = 0:$$

Ուրեմն, Ժորդանյան նորմալ տեսքում կա $\lambda = 2$ սեփական արժեքին համապատասխանող մեկ հատ 1-չափանի վանդակ: Դա համընկնում է այդ սեփական արժեքի պատիկության հետ: Ուրեմն, մատրիցի Ժորդանյան տեսքը հետևյալն է՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Մատրիցի Ժորդանյան նորմալ տեսքն իրական թվերի դաշտի դեպքում

Երբ հիմնական դաշտը, որի նկատմամբ է սահմանված L գծային տարածությունը, իրական թվերի դաշտն է, այսինքն, $K = R$, գծային օպերատորի մատրիցը ընդհանուր դեպքում չի կարելի բերել եռանկյունաձև և, ուստի, Ժորդանյան նորմալ տեսքի, սակայն միշտ կարելի է կառուցել մի բազիս, որում մատրիցը կունենա բավականին պարզ տեսք, որը համարվում է Ժորդանյան նորմալ տեսքի անալոգն իրական թվերի դաշտի համար:

Դիցուք $K = R$, $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատոր է, L-ը տրոհված է ինվարիանտ ցիկլիկ ենթատարածությունների ըստ Թեորեմ 20-ի և ամեն մի ենթատարածության մինիմալ բազմանդամ անվերածելի բազմանդամի աստիճան է: Իրական թվերի դաշտի նկատմամբ անվերածելի բազմանդամներն են գծային բազմանդամները և քառակուսային այն բազմանդամները, որոնց դիսկրիմինանտը բացասական է: Ուստի, L-ի տրոհման ենթատարածությունների մինիմալ բազմանդամները կարող են ունենալ հետևյալ երկու տեսքերից մեկը՝ $(\theta - \lambda)^s$, որտեղ $\lambda \in K$, կամ էլ $((\theta - \sigma)^2 + \tau^2)^s$, որտեղ σ-ն և τ-ն իրական թվեր են, ընդ որում $\tau > 0$: Առաջին դեպքում, երբ մինիմալ բազմանդամը $(\theta - \lambda)^s$-ն է, քանի որ λ-ն իրական է, ապա տվյալ ենթատարածությանը կհամապատասխանեն Ժորդանյան վանդակներ: Երկրորդ դեպքում Ժորդանյան վանդակներ չի կարելի կառուցել և մենք կվարվենք այլ կերպ:

Ուրեմն դիցուք տրված է M ցիկլիկ ենթատարածությունը, որը մասնակցում է L-ի տրոհմանը և որի մինիմալ բազմանդամն է $((\theta - \sigma)^2 + \tau^2)^p$-ը, որտեղ σ-ն և τ-ն իրական թվեր են, ընդ որում $\tau > 0$: Քանի որ M-ը ինվարիանտ է $\mathcal{A}$-ի նկատմամբ, ապա $\mathcal{A}$-ն նույնպես գծային օպերատոր է M-ի վրա՝ $\mathcal{A}: M \to M$:

Դիտարկենք $\mathcal{B}: M \to M$ գծային օպերատորը, որը սահմանվում է որպես $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \sigma\mathcal{I}$, որտեղ $\mathcal{I}$-ն նույնաբար օպերատորն է: Պարզ է, որ $\mathcal{B}$-ի նկատմամբ M ենթատարածության մինիմալ բազմանդամը կլինի $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը: Եթե A մատրիցը ներկայացնում է $\mathcal{A}$-ն որևէ բազիսում, ապա $A - \sigma E$ մատրիցը ներկայացնում է $\mathcal{B}$-ն: Ուստի, եթե կառուցենք $\mathcal{B}$-ի որևէ պարզ ներկայացում B մատրիցով, ապա հեշտությամբ դրանից կանցնենք $\mathcal{A}$-ի ներկայացմանը $A = B + \sigma E$ բանաձևով:

Այսպիսով, փորձենք գտնել Ժորդանյան վանդակների անալոգը $\mathcal{B}$ օպերատորի մատրիցի համար:

Կրկնենք, որ $\mathcal{B}: M \to M$, $\dim M = n$ և մինիմալ բազմանդամն է $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը, որտեղ $\tau > 0$:

Ֆիքսենք որևէ բազիս՝ $e_1, \ldots, e_n$ և դրանով իսկ սահմանենք M-ի և

$$V_n(R) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_j \in R, j = 1, 2, \ldots, n\}\text{-ի}$$

միջև իզոմորֆիզմ: M-ի կամայական x տարրին կհամապատասխանի $e_1, \ldots, e_n$ բազիսում նրա $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ ներկայացման կոորդինատային վեկտորը $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$-ը: Բազիսային e_j տարրին կհամապատասխանի

$$(0, 0, \ldots, 0, \underbrace{\;1\;}_{j\text{-րդ տեղը}}, 0, \ldots, 0)$$

վեկտորը: Պարզ է, որ

$$V_n(R) \subseteq V_n(\mathbb{C}) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, n\}:$$

Դյուրին է նկատել, որ $e_1, \ldots, e_n$ տարրերին համապատասխանող վեկտորները $V_n(R)$-ում գծորեն անկախ են նաև $V_n(\mathbb{C})$-ում և կազմում են բազիս: Ուստի, մենք կարող ենք ընդլայնել M-ը մինչև մի գծային տարածություն $\mathbb{C}$-ի նկատմամբ հետևյալ կերպ: Ֆորմալ ձևով *ավելացնենք M-ին բոլոր αe_j արտադրյալները, որտեղ $\alpha \in \mathbb{C}$, և կազմենք ստացված բազմության գծային թաղանթը $\mathbb{C}$-ի նկատմամբ: Կստանանք հետևյալ բազմությունը՝*

$$\tilde{M} = \{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \mid \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1,2,\ldots,n\},$$

որը հանդիսանում է գծային տարածություն $\mathbb{C}$-ի նկատմամբ և իզոմորֆ է $V_n(\mathbb{C})$-ին, ուստի $\dim \tilde{M} = n$: Եթե $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$-ը իրական են, ապա $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in M$: Պարզ է, որ իմաստ ունի խոսել $\tilde{M}$ տարածության տարրի համալուծի մասին՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in \tilde{M}$, ապա $\bar{x} = \bar{\alpha}_1 e_1 + \ldots + \bar{\alpha}_n e_n$: Եթե $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in M$, ապա $x = \bar{x}$: Նկատենք, որ e_j բազիսային տարրի կոորդինատներն են՝

$$0,0,\ldots,0, \underbrace{1}_{j\text{-րդ տեղը}}, 0,\ldots,0$$

և իսկապես $e_j = \bar{e}_j$:

Այժմ տարածենք $\mathcal{B}$ օպերատորի գործողությունը ամբողջ $\tilde{M}$ վրա: Նշանակենք $\tilde{\mathcal{B}}$-ով ընդլայնված օպերատորը՝ $\tilde{\mathcal{B}} : \tilde{M} \to \tilde{M}$, որը գործում է հետևյալ կերպ՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in \tilde{M}$, ապա $\tilde{\mathcal{B}} x = \alpha_1 \mathcal{B} e_1 + \ldots + \alpha_n \mathcal{B} e_n$: Ակնհայտ է, որ $\tilde{\mathcal{B}}$-ն գծային օպերատոր է $\tilde{M}$-ի վրա $\mathbb{C}$ դաշտի նկատմամբ և $\tilde{\mathcal{B}}$-ի սահմանափակումը M վրա համընկնում է $\mathcal{B}$-ի հետ: Նոր օպերատորի համար $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը կլինի վերացնող: Իսկապես,

$$(\tilde{\mathcal{B}}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\tilde{\mathcal{B}}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mathcal{B}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p e_k,$$

քանի որ $e_j \in M$: Ակնհայտ է, որ $(\mathcal{B}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p e_j = 0$, ուստի $(\tilde{\mathcal{B}}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p x = 0$: Իրականում, $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը կլինի մինիմալ $\tilde{\mathcal{B}}$-ի համար: Իսկապես, դիցուք $h(\theta) = (\theta - i\tau)^s (\theta + i\tau)^t$ բազմանդամը $(\theta^2 + \tau^2)^p = (\theta - i\tau)^p (\theta + i\tau)^p$ բազմանդամի սեփական բաժանարարն է (այսինքն $s + t < 2p$) և վերացնող է $\tilde{\mathcal{B}}$-ի համար: Դյուրին է տեսնել, որ $h(\theta) = h_1(\theta) + ih_2(\theta)$, որտեղ $h_1(\theta)$ և $h_2(\theta)$ բազմանդամներից առնվազն մեկը զրոյական չէ: Նշանակենք e-ով M-ի այն տարրը, որի մինիմալ բազմանդամը համընկնում է ամբողջ տարածության մինիմալ բազմանդամի՝ $(\theta^2 + \tau^2)^p$ հետ: Ակնհայտ է, որ

$$0 = h(\tilde{\mathcal{B}})e = h_1(\tilde{\mathcal{B}})e + ih_2(\tilde{\mathcal{B}})e = h_1(\mathcal{B})e + ih_2(\mathcal{B})e$$

և

$$h_1(\mathcal{B})e = h_2(\mathcal{B})e = 0:$$

Քանի որ $\deg h_1(\theta), \deg h_2(\theta) \leq \deg h(\theta) < 2p$, ապա e-ի համար ստանում ենք իրական գործակիցներով վերացնող բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր է $2p$-ից, ինչն անհնար է:

Քանի որ $(\theta^2 + \tau^2)^p = (\theta - i\tau)^p(\theta + i\tau)^p$, ապա մինիմալ բազմանդամը ներկայացված է փոխադարձաբար պարզ բազմանդամների արտադրյալի տեսքով (այսուհետև i-ն կօգտագործենք բացառապես կեղծ միավորը նշանակելու համար): Կիրառենք Թեորեմ 16-ը և տրոհենք $\tilde{M}$-ը երկու ինվարիանտ (պարզ է, որ ցիկլիկ) ենթատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամներն են՝ $(\theta - i\tau)^p$ և $(\theta + i\tau)^p$: Կստանանք $\tilde{M} = L^- \dotplus L^+$ և $(\theta - i\tau)^p$-ը մինիմալ է L^--ի համար, իսկ $(\theta + i\tau)^p$-ը՝ L^+-ի: Տեղի ունի հետևյալ հատկությունը՝

$$\begin{gathered}(\tilde{\mathcal{B}} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0 \Leftrightarrow x \in L^- \\ (\tilde{\mathcal{B}} + i\tau\mathcal{I})^p x = 0 \Leftrightarrow x \in L^+\end{gathered} \tag{28}$$

Իսկապես, $x \in L^- \Rightarrow (\tilde{\mathcal{B}} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ և $x \in L^+ \Rightarrow (\tilde{\mathcal{B}} + i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ հետևում են $(\theta - i\tau)^p$ և $(\theta + i\tau)^p$ բազմանդամների մինիմալությունից: Քանի որ $(\theta - i\tau)^p$ և $(\theta + i\tau)^p$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են, ապա կգտնվեն $\phi_1(\theta)$ և $\phi_2(\theta) \in \mathbb{C}[\theta]$, որ՝

$$1 = \phi_1(\theta)(\theta - i\tau)^p + \phi_2(\theta)(\theta + i\tau)^p$$

և, ուստի,

$$\mathcal{I} = \phi_1(\mathcal{B})(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p + \phi_2(\mathcal{B})(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p:$$

Դիցուք $x = x^- + x^+ \in \tilde{M}$, որտեղ $x^- \in L^-, x^+ \in L^+$ և $(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0$, ապա՝

$$0 = (\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = \underbrace{(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^-}_{=0} + (\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^+ = (\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^+:$$

Մյուս կողմից՝

$$x^+ = \mathcal{I}x^+ = \phi_1(\mathcal{B})(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^+ + \phi_2(\mathcal{B})(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p x^+ = 0,$$

ուրեմն, $x = x^-$ և $x \in L^-$: Այսինքն ապացուցեցինք, որ՝

$$(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0 \Rightarrow x \in L^-:$$

Նման ձևով կստանանք՝ $(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p x = 0 \Rightarrow x \in L^+$ և (28)-ը ապացուցված է:

Հեշտ է նկատել, որ $(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ հավասարման մեջ անցնելով համալուծ տարրերին ստանում ենք $(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p \bar{x} = 0$ պայմանը և հակառակը՝ $(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ պայմանից $(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p \bar{x} = 0$ պայմանը: Այսինքն $x \in L^- \Leftrightarrow \bar{x} \in L^+$ և $\dim L^- = \dim L^+ = m$: Անմիջապես ստանում ենք, որ՝

$$n = \dim \tilde{M} = \dim L^- + \dim L^+ = 2m,$$

այսինքն $\tilde{M}$-ի չափը զույգ թիվ է:

Կառուցենք L^- տարածության ժորդանյան բազիսը՝ $d_1, \ldots, d_m$, որի համար տեղի ունի

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}d_1 &= i\tau d_1 \\
\mathcal{B}d_2 &= i\tau d_2 + d_1 \\
&\vdots \\
\mathcal{B}d_j &= i\tau d_j + d_{j-1} \\
&\vdots \\
\mathcal{B}d_m &= i\tau d_m + d_{m-1}
\end{aligned}
$$

Պարզ է, որ L^+-ի Ժորդանյան բազիսը դա L^--ի Ժորդանյան բազիսի համալուծն է՝ $\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_m$, որի համար տեղի ունի՝

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}\bar{d}_1 &= -i\tau\bar{d}_1 \\
\mathcal{B}\bar{d}_2 &= -i\tau\bar{d}_2 + \bar{d}_1 \\
&\vdots \\
\mathcal{B}\bar{d}_j &= -i\tau\bar{d}_j + \bar{d}_{j-1} \\
&\vdots \\
\mathcal{B}\bar{d}_m &= -i\tau\bar{d}_m + \bar{d}_{m-1}
\end{aligned}
$$

Սահմանենք M տարածության տարրերի հետևյալ համակարգը՝

$$
\begin{aligned}
f_j &= \tfrac{1}{2}(d_j + \bar{d}_j) \\
g_j &= \tfrac{1}{2i}(d_j - \bar{d}_j)
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

$j = 1,2,\ldots,m$:

Ակնհայտ է, որ $f_j, g_j \in M,\ j = 1,2,\ldots,m$: Հեշտությամբ կարելի է շրջել (**29**) *բանաձևերը՝*

$$
\begin{aligned}
d_j &= f_j + ig_j \\
\bar{d}_j &= f_j - ig_j
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

$j = 1,2,\ldots,m$:

Ստացված (**29**) *և* (**30**) *բանաձևերից հետևում է, որ* $\{d_1,\ldots,d_m,\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_m\}$ *և* $\{f_1,g_1,f_2,g_2,\ldots,f_m,g_m\}$ *համակարգերի* գծային թաղանթները $\tilde{M}$-ում համընկնում են, ուստի $\{f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_m, g_m\}$ համակարգը $\tilde{M}$-ի բազիսն է կազմված M-ի (այսինքն իրական) տարրերից: Տեսնենք այժմ, թե ինչ տեսք ունի $\mathcal{B}$ օպերատորի մատրիցը $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_m, g_m$ բազիսում՝

$$\mathcal{B}f_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{B}d_1 + \mathcal{B}\bar{d}_1) = \frac{1}{2}(i\tau d_1 - i\tau\bar{d}_1) = -\tau\frac{1}{2i}(d_1 - \bar{d}_1) = -\tau g_1$$

$$\mathcal{B}g_1 = \frac{1}{2i}(\mathcal{B}d_1 - \mathcal{B}\bar{d}_1) = \frac{1}{2i}(i\tau d_1 + i\tau\bar{d}_1) = \tau\frac{1}{2}(d_1 + \bar{d}_1) = \tau f_1$$

$$\mathcal{B}f_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{B}d_2 + \mathcal{B}\bar{d}_2) = \frac{1}{2}(i\tau d_2 - i\tau\bar{d}_2) + \frac{1}{2}(d_1 + \bar{d}_1) = -\tau g_2 + f_1$$

$$\mathcal{B}g_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{B}d_2 - \mathcal{B}\bar{d}_2) = \frac{1}{2i}(i\tau d_2 + i\tau\bar{d}_2) + \frac{1}{2i}(d_1 - \bar{d}_1) = \tau f_2 + g_1$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{B}f_j = \frac{1}{2}(\mathcal{B}d_j + \mathcal{B}\bar{d}_j) = \frac{1}{2}(i\tau d_j - i\tau\bar{d}_j) + \frac{1}{2}(d_{j-1} + \bar{d}_{j-1}) = -\tau g_j + f_{j-1}$$

$$\mathcal{B}g_j = \frac{1}{2i}(\mathcal{B}d_j - \mathcal{B}\bar{d}_j) = \frac{1}{2i}(i\tau d_j + i\tau\bar{d}_j) + \frac{1}{2i}(d_{j-1} - \bar{d}_{j-1}) = \tau f_j + g_{j-1}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{B}f_m = \frac{1}{2}(\mathcal{B}d_m + \mathcal{B}\bar{d}_m) = \frac{1}{2}(i\tau d_m - i\tau\bar{d}_m) + \frac{1}{2}(d_{m-1} + \bar{d}_{m-1}) = -\tau g_m + f_{m-1}$$

$$\mathcal{B}g_m = \frac{1}{2i}(\mathcal{B}d_m - \mathcal{B}\bar{d}_m) = \frac{1}{2i}(i\tau d_m + i\tau\bar{d}_m) + \frac{1}{2i}(d_{m-1} - \bar{d}_{m-1}) = \tau f_m + g_{m-1}$$

Այսինքն՝

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}f_1 \\ \mathcal{B}g_1 \\ \mathcal{B}f_2 \\ \mathcal{B}g_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}f_j \\ \mathcal{B}g_j \\ \vdots \\ \mathcal{B}f_m \\ \mathcal{B}g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau & 0 & 0 & & & & & & \\ \tau & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \tau & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \tau & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & -\tau \\ & & & & & & 0 & 1 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \\ g_2 \\ \vdots \\ f_j \\ g_j \\ \vdots \\ f_m \\ g_m \end{pmatrix}$$

Քանի որ մատրիցի տարրերը իրական թվեր են, ուստի այն ներկայացնում է նաև $\mathcal{B}$ օպերատորը M տարածության վրա:

Վերադառնալով $\mathcal{A}$ օպերատորին և հաշվի առնելով, որ $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \sigma\mathcal{I}$ ստանում ենք մատրիցի վերջնական տեսքը՝

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau & 0 & 0 & & & & & & \\ \tau & \sigma & 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & \sigma & -\tau & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \tau & \sigma & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & 0 & \sigma & -\tau & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \tau & \sigma & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 & \sigma & -\tau \\ & & & & & & 0 & 1 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

Այս մատրիցը հանդիսանում է Ժորդանյան վանդակի անալոգը և կոչվում է իրական Ժորդանյան վանդակ:

Օրինակ

Կառուցենք՝

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

մատրիցի իրական Ժորդանյան տեսքը:

Դյուրին է հաշվել մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամի տեսքը՝ $(\theta^2 + 1)^2$: Ուստի, տարածության մինիմալ բազմանդամը կամ $\theta^2 + 1$-ն է, կամ էլ $(\theta^2 + 1)^2$-ն: Եթե $\theta^2 + 1$-ը վերացնող է, ապա $A^2 + E = 0$, *սակայն դա այդպես չէ: Որեւմն, մինիմալ բազմանդամը* $(\theta^2+1)^2$*-ն է: Այս բազմանդամի համար* $\sigma = 0$, $\tau = 1$, *ուստի իրական Ժորդանյան տեսքը կլինի հետեւյալը`*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ունիտար և էվքլիդեսյան տարածություններ

Այսուհետև հիմնական K դաշտը կլինի կամ իրական թվերի դաշտը՝ R-ը, կամ էլ կոմպլեքս թվերի դաշտը՝ $\mathbb{C}$-ն:

Դիցուք L-ը գծային տարածություն է $K = \mathbb{C}$ դաշտի նկատմամբ: α կոմպլեքս թվի համալուծը կնշանակենք $\overline{\alpha}$-ով: Դիցուք A-ն մատրից է, որի տարրերը կոմպլեքս թվեր են, A^*-ով կնշանակենք համալուծ մատրիցը, որը ստացվում է A-ից այն շրջելով (տրանսպոնացնելով) և բոլոր թվերը համալուծներով փոխարինելով: Իրական թվերի դեպքում համալուծ մատրիցը համընկնում է շրջվածի հետ:

Սահմանում: Դիցուք տրված է $L \times L \to K$ արտապատկերումը: Նշանակենք $(a,b) \in L$ կարգավորված զույգին համապատասխանող թիվը (a,b)-ով: $L \times L \to K$ արտապատկերումը կոչվում է **սկալյար արտադրյալ**, եթե

1. $(a,b) = \overline{(b,a)}$
2. $(a+b,c) = (a,c)+(b,c)$
3. $(\lambda a,b) = \lambda(a,b)$
4. (a,a)-ն իրական թիվ է և $(a,a) \geq 0$, բացի այդ $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Դյուրին է համոզվել, որ

$$(a,b+c) = (a,b)+(a,c):$$

Իսկապես,

$$(a,b+c) = \overline{(b+c,a)} = \overline{(b,a)} + \overline{(c,a)} = (a,b)+(a,c):$$

Նույն ձևով կստանանք՝ $(a,\lambda b) = \overline{(\lambda b,a)} = \overline{\lambda}\overline{(b,a)} = \overline{\lambda}(a,b)$:

Նաև պարզ է, որ եթե $a=0$ կամ $b=0$, ապա $(a,b)=0$:

Սահմանման 4-րդ պայմանը կոչվում է **դրականորեն որոշվածության** պայման:

Իրական թվերի դաշտի դեպքում սկալյար արտադրյալի սահմանումը կարտագրվի հետևյալ կերպ.

1. $(a,b)=(b,a)$
2. $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$
3. $(\lambda a,b)=\lambda(a,b)$
4. $(a,a)\geq 0$, բացի այդ $(a,a)=0 \Leftrightarrow a=0$

Սահմանում: L գծային տարածությունը կոմպլեքս թվերի (իրական թվերի) նկատմամբ կոչվում է **ունիտար (էվքլիդեսյան)**, եթե այդ տարածության մեջ կարելի է սահմանել սկալյար արտադրյալ:

Դիցուք L-ը ունիտար տարածություն է, $\dim L=n$ և

$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\text{-ն}$$

տարածության բազիսն է: Եթե $x,\ y\in L$, ապա $x=\Lambda\mathcal{E}$ և $y=\Upsilon\mathcal{E}$, որտեղ $\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ և $\Upsilon=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$: Հաշվենք (x,y) սկալյար արտադրյալը օգտվելով նրա սահմանման 2 և 3 պայմաններից՝

$$(\Lambda\mathcal{E},\Upsilon\mathcal{E})=(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n,\gamma_1 e_1+\ldots+\gamma_n e_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\overline{\gamma}_j(e_i,e_j):$$

Նշանակենք A-ով $n\times n$ չափանի մատրիցը, որի i,j-րդ տարրը (e_i,e_j)-ն է: Դյուրին է ստուգել, որ $(x,y)=\Lambda A\Upsilon^*$: Էվքլիդեսյան տարածության *համար՝* $(x,y) = \Lambda A \Upsilon^T$*: Փաստորեն սկալյար արտադրյալը հաշվելու համար բավական է իմանալ* (e_i, e_j) *թվերը՝* A *մատրիցը:*

Այժմ փորձենք L *տարածության համար սահմանել սկալյար արտադրյալ, օգտվելով* $(x,y) = \Lambda A \Upsilon^*$ *բանաձևից, ընտրելով* A *մատրիցն այնպես, որ բավարարվեն սկալյար արտադրյալի* 1 - 4 *պայմանները:*

A *մատրիցի տարրերը նշանակենք* α_{ij} *նշաններով: Սահմանենք՝* $(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$*: Քանի որ համաձայն* 1 *պայմանի* $(e_i, e_j) = \overline{(e_j, e_i)}$, *ապա* $\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$, *այսինքն* $A = A^*$*: Այսպիսի մատրիցը կոչվում է* ***ինքնահամալուծ****: Այժմ սահմանենք սկալյար արտադրյալը կամայական* $x,\ y \in L$ *համար հետևյալ կերպ.*

$(x,y) = \Lambda A \Upsilon^*$, *որտեղ* Λ*-ն և* Υ*-ն* x*-ի և* y*-ի կոորդինատային վեկտորներն են* $\mathcal{E}$ *բազիսում: Ստուգենք* 1 - 4 *պայմանները.*

1. $(x,y) = \Lambda A \Upsilon^* = (\Upsilon A^* \Lambda^*)^* = \overline{(\Upsilon A \Lambda^*)} = \overline{(y,x)}$
2. $(x+y,z) = (\Lambda + \Upsilon) A \Omega^* = \Lambda A \Omega^* + \Upsilon A \Omega^* = (x,z) + (y,z)$
3. $(\lambda x, y) = (\lambda) A \Upsilon^* = \lambda(\Lambda A \Upsilon^*) = \lambda(x,y)$

Այսպիսով առաջին երեք պայմանները բավարարված են: Անցնենք վերջին՝ դրականորեն որոշվածության պայմանի ստուգմանը: Նախ համոզվենք, որ (x,x)*-ը իրական թիվ է: Դա ակնհայտ է, քանի որ համաձայն առաջին պայմանի* $(x,x) = \overline{(x,x)}$*: Չորրորդ պայմանի մնացած պահանջները հետևյալն են.*

կամայական x*-ի համար* $(x,x) \ge 0$ *և* $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *այսինքն՝*

$$\Lambda \ne 0 \Rightarrow \Lambda A \Lambda^* > 0 \text{ և } \Lambda A \Lambda^* = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0 \qquad (31)$$

(31) *պայմանին բավարարող մատրիցները կոչվում են* ***դրականորեն որոշված*** *մատրիցներ:*

Մենք ապացուցեցինք, որ

սկալյար արտադրյալը ունիտար տարածությունում ֆիքսված բազիսի դեպքում միարժեքորեն որոշվում է ինքնահամալուծ, դրականորեն որոշված A մատրիցով $(x,y) = \Lambda A \Upsilon^*$ բանաձևով, որտեղ Λ-ն և Υ-ն x-ի և y-ի կոորդինատային վեկտորներն են ε բազիսում:

Իրական դաշտի դեպքում ինքնահամալուծության պայմանը փոխարինվում է սիմետրիկության պայմանով:

Ինքնահամալուծ և դրականորեն որոշված մատրիցի օրինակ է միավոր մատրիցը: Իսկապես ակնհայտ է, որ այն ինքնահամալուծ է: Ապա պարզ է, որ

$$\Lambda E \Lambda^* = \Lambda \Lambda^* = \lambda_1 \overline{\lambda}_1 + \ldots + \lambda_n \overline{\lambda}_n = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 \geq 0$$

և

$$\Lambda \Lambda^* = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0:$$

Նկատենք, որ այն դեպքում, երբ $A = E$ միավոր մատրիցն է, ստանում ենք՝

$$(x,y) = \Lambda \Upsilon^* = \lambda_1 \overline{\upsilon}_1 + \ldots + \lambda_n \overline{\upsilon}_n$$

(իրական թվերի դեպքում $(x,y) = \Lambda \Upsilon^T = \lambda_1 \upsilon_1 + \ldots + \lambda_n \upsilon_n$) հայտնի բանաձևերը սկալյար արտադրյալի համար, որոնք ինչպես պարզեցինք սկալյար արտադրյալ սահմանելու միակ բանաձևերը չեն:

Ինքնահամալուծ և դրականորեն որոշված մատրիցների բազմազանությունն անվերջ է: Դիտարկենք այդպիսի մատրիցների կառուցման եղանակը: Դիցուք B-ն մի քառակուսի մատրից է կոմպլեքս թվերի դաշտի նկատմամբ, որի համար $\det B \neq 0$: Նշանակենք՝ $A = BB^*$: Համոզվենք, որ A-ն ինքնահամալուծ է.

$$A^* = (BB^*)^* = ((B^*)^*)B^* = BB^* = A:$$

Այժմ ստուգենք դրականորեն որոշվածությունը: Ունենք, որ

$$\Lambda A\Lambda^* = \Lambda(BB^*)\Lambda^* = (\Lambda B)E(B^*\Lambda^*) = (\Lambda B)E(\Lambda B)^*:$$

Եթե $\Lambda \neq 0$, ապա $\Lambda B \neq 0$, քանի որ $\det B \neq 0$ և $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ անհայտներով $\Lambda B = 0$ գծային համասեռ հավասարումների համակարգն ունի միակ $\Lambda = 0$ լուծումը: Ուստի՝

$$\Lambda A\Lambda^* = (\Lambda B)E(\Lambda B)^* \geq 0,$$

քանի որ միավոր մատրիցը դրականորեն որոշված է: Նաև, եթե $\Lambda \neq 0$, ապա՝

$$\Lambda A\Lambda^* = (\Lambda B)E(\Lambda B)^* > 0,$$

քանի որ $\Lambda B \neq 0$ և միավոր մատրիցը դրականորեն որոշված է:

Սահմանում. $x \in L$ տարրի **նորմ** (կամ **երկարություն**) կոչվում է $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ իրական թիվը:

Ակնհայտ է, որ $\|x\| \geq 0$ և $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$: Բացի այս հատկությունից նորմն ունի նաև հետևյալ հիմնական հատկությունները.

1. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

2. $|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$

Առաջին հատկությունը ստուգվում է ուղղակիորեն՝

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x,x)} = |\lambda|\|x\|:$$

Երկրորդ հատկությունը հայտնի է որպես **Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարություն**: Ապացուցենք այն:

Ունենք՝

$$\|x - \lambda y\|^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0, \qquad (32)$$

որտեղ $x, y \in L$ և $\lambda \in K$: Բացելով փակագծերը ստանում ենք՝

$$(x,x) - \lambda(y,x) - \overline{\lambda}(x,y) + \lambda\overline{\lambda}(y,y) \geq 0: \qquad (33)$$

Երբ $y = 0$ Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարությունն ակնհայտորեն բավարարված է, ուստի դիտարկենք $y \neq 0$ դեպքը և (33)-ում ընտրենք $\lambda = \dfrac{(x,y)}{(y,y)}$: Ստացվում է՝

$$(x,x) - \frac{(x,y)\overline{(x,y)}}{(y,y)} \geq 0$$

և, վերջապես,

$$\|x\|^2\|y\|^2 = (x,x)(y,y) \geq (x,y)\overline{(x,y)} = |(x,y)|^2:$$

Դյուրին է ստուգել, որ (32)-ում $\|x - \lambda y\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda y$, ուստի Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարությունը դառնում է հավասարություն միայն, եթե $x = \lambda y$, այսինքն՝ x և y տարրերը գծորեն կախված են:

Օգտվելով նորմից, կարելի է սահմանել ունիտար (էվքլիդեսյան) տարածության տարրերի միջև հեռավորության գաղափարը որպես $\rho(x,y) = \|x - y\| \geq 0$: Հեռավորությունը բավարարում է հետևյալ ստանդարտ պայմաններին.

1. $\rho(x,x) = 0$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Վերջին պայմանը եռանկյան անհավասարությունն է: Այն հետևում է Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարությունից.

$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ անհավասարությունը համարժեք է

$$\sqrt{(x-z,x-z)} \leq \sqrt{(x-y,x-y)} + \sqrt{(y-z,y-z)}$$

անհավասարությանը, որն իր հերթին համարժեք է

$$\sqrt{(a+b,a+b)} \le \sqrt{(a,a)} + \sqrt{(b,b)}$$

անհավասարությանը, որտեղ $a = x - y$, $b = y - z$*։* **Քառակուսի** *բարձրացնելով անհավասարությունը ստանում ենք՝*

$$(a+b,a+b) \le (a,a) + (b,b) + 2\sqrt{(a,a)(b,b)}\,,$$

$$(a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b) \le (a,a) + (b,b) + 2\sqrt{(a,a)(b,b)}$$

և

$$\mathrm{Re}(a,b) \le \sqrt{(a,a)(b,b)} \tag{34}$$

որտեղ Re*-ն նշանակում է թվի իրական մասը։* **Բայց** (34)*-ը հեշտությամբ հետևում է* **Կոշի - Բունիակովսկու** *անհավասարությունից, քանի որ ակնհայտորեն* $\mathrm{Re}(a,b) \le \sqrt{|(a,b)|}$ *և* $\sqrt{|(a,b)|} \le \sqrt{\|a\|}\sqrt{\|b\|}$*։*

Օրթոնորմալ բազիսներ

Սահմանում: Ունիտար տարածության x և y տարրերը կոչվում են **օրթոգոնալ**, եթե $(x, y) = 0$: Օրթոգոնալությունը նշանակվում է հետևյալ կերպ՝ $x \perp y$:

Սահմանումից հետևում է, որ զրոյական տարրը համարվում է օրթոգոնալ բոլոր տարրերին: Սկալյար արտադրյալի դրականորեն որոշվածությունից ստացվում է, որ միայն զրոյական տարրն է ինքն իրեն օրթոգոնալ:

Դիցուք $e_1, \ldots, e_k \in L$ ունիտար տարածությանը և ոչ մի e_i, $i = 1, \ldots, k$, զրոյական չէ: Ապացուցենք, որ եթե $e_1, \ldots, e_k$ համակարգի տարրերը զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են (այսինքն՝ $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$), ապա համակարգը գծորեն անկախ է: Իրոք, եթե $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$, ապա սկալյար բազմապատկելով հավասարության երկու մասերը e_j-ով կստանանք՝

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (e_i, e_j) = \lambda_j (e_j, e_j):$$

Բայց՝ $(e_j, e_j) > 0$, ուրեմն՝ $\lambda_j = 0$: Քանի որ j-ն կամայական է, ապա $\lambda_j = 0, j = 1, \ldots, k$:

Համակարգը կոչվում է **օրթոգոնալ**, եթե $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$:

Եթե տրված է $e_1, \ldots, e_n$ օրթոգոնալ համակարգը, որի տարրերը ոչ զրոյական են և $\dim L = n$, այդ համակարգը տարածության բազիսն է:

Սահմանում: Ունիտար տարածության բազիսը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե այն օրթոգոնալ համակարգ է, և այն կոչվում է *նորմավորված*, եթե նրա յուրաքանչյուր տարրի նորմը հավասար է մեկի:

Բազիսը կոչվում է **օրթոնորմալ** կամ **օրթոնորմավորված**, եթե այն օրթոգոնալ է և նորմավորված:

Այսինքն օրթոնորմավորված $e_1,\ldots,e_k$ համակարգի համար ունենք՝

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}1, & \text{եթե } i=j\\ 0, & \text{եթե } i\neq j\end{cases}:$$

Պարզ է, որ x և y տարրերի, որոնց կոորդինատային վեկտորներն են $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$-ը և $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$-ը տրված բազիսում, սկալյար արտադրյալը տրվում է $\lambda_1\mu_1+\ldots+\lambda_n\mu_n$ բանաձևով միայն և միայն այն դեպքում, երբ բազիսը օրթոնորմալ է:

Դյուրին է տեսնել, որ եթե $e_1,\ldots,e_k$ համակարգում չկան զրոյական տարրեր, ապա՝

$$\|e_1\|^{-1}e_1,\ldots,\|e_k\|^{-1}e_k$$

համակարգը նորմավորված է: Ուստի, եթե տրված է օրթոգոնալ բազիս, ապա այն հեշտությամբ կարելի է նորմավորել, քանի որ, եթե $e_1,\ldots,e_k$ համակարգն օրթոգոնալ է, ապա օրթոգոնալ է նաև $\|e_1\|^{-1}e_1,\ldots,\|e_k\|^{-1}e_k$ համակարգը:

Օրթոնորմալ բազիսները դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերի ընդհանրացումն են բազմաչափ տարածությունների համար:

Թեորեմ 22.

Ցանկացած վերջավոր չափանի էվկլիդյան տարածությունում միշտ գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս:

Ապացույց. Վերցնենք որևէ բազիս՝ $e_1,\ldots,e_n$ և փորձենք ձևափոխել այն օրթոգոնալ բազիսի: Դրանից հետո ակնհայտ ձևով կնորմավորենք ստացված բազիսը և թեորեմը կապացուցվի:

$e_1,\ldots,e_n$ բազիսը կանվանենք հին բազիս:

Կառուցենք նոր, օրթոգոնալ բազիս, որի տարրերը կնշանակենք $d_1,\ldots,d_n$-ով:

Վերցնենք $d_1 = e_1$: Այժմ վերցնենք $d_2 = e_2 + \lambda_1 d_1$ և ընտրենք λ_1-ն այնպես, որ d_2-ը լինի օրթոգոնալ d_1-ին.

$$(d_2,d_1) = (e_2,d_1) + \lambda_1(d_1,d_1) = 0$$

Պարզ է, որ ընտրելով λ_1-ը հավասար $-\dfrac{(e_2,d_1)}{(d_1,d_1)}$-ի ստանում ենք՝ $(d_2,d_1) = 0$: Պարզ է նաև, որ $d_2 \neq 0$, քանի որ e_1,e_2 համակարգը գծորեն անկախ է:

Անենք ինդուկտիվ ենթադրություն, որ արդեն կառուցել ենք ոչ զրոյական տարրերի $d_1,\ldots,d_k$, $k < n$, համակարգն այնպես, որ բոլոր $i,j \in \{1,\ldots,k\}$ համար տեղի ունի՝ $i \neq j \Rightarrow (d_i,d_j) = 0$ և ամեն մի d_i-ն e_i-ի և $d_1,\ldots,d_{i-1}$-ըի գծային կոմբինացիան է: Ցույց տանք, որ այդ համակարգը կարող ենք ընդլայնել ավելացնելով d_{k+1}-ը, պահպանելով համակարգի նշված հատկությունը:

Վերցնենք՝

$$d_{k+1} = e_{k+1} + \alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_k d_k$$

և ընտրենք $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ թվերն այնպես, որ $(d_{k+1},d_i) = 0$ բոլոր $i = 1,\ldots,k$: Կամայական j-ի համար բազմապատկենք d_{k+1}-ն d_j-ով

$$(d_{k+1},d_j) = (e_{k+1},d_j) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (d_i,d_j) = (e_{k+1},d_j) + \alpha_j (d_j,d_j):$$

Վերցնելով $\alpha_j = -\dfrac{(e_{k+1}, d_j)}{(d_j, d_j)}$ ստանում ենք՝ $(d_{k+1}, d_j) = 0$, $j = 1, \ldots, k$։ Պարզ է, որ $d_{k+1} \neq 0$, քանի որ $d_{k+1} = e_{k+1} + \alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_k d_k$, և փոխարինելով $d_1, \ldots, d_k$-ըր նրանց արտահայտություններով $e_1, \ldots, e_k$ տարրերի գծային կոմբինացիաներով կստանանք՝ $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ տարրերի գծային կոմբինացիա, որի մեջ e_{k+1}-ի գործակիցը 1 է, իսկ $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ համակարգը գծորեն անկախ է։ Թեորեմն ապացուցված է։

Թեորեմի ապացույցի մեջ օգտագործված ալգորիթմը կոչվում է **Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման պրոցես**։

Եթե տրված է $e_1, \ldots, e_k$ օրթոնորմալ համակարգը և $k < \dim L = n$, ապա մենք կարող ենք ընդլայնել այդ համակարգը մինչև տարածության բազիսը՝ $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$։ Ստացված բազիսին կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման պրոցեսը սկսած e_{k+1}-ից և կստանանք օրթոնորմալ բազիս, որը պարունակում է $e_1, \ldots, e_k$ համակարգը։ Այսպիսով՝

օրթոնորմալ համակարգը կարելի է ընդլայնել, նոր տարրեր ավելացնելով, մինչև ամբողջ տարածության օրթոնորմալ բազիս։

Սկալյար արտադրյալը սահմանելիս արդեն նկատել էինք, որ եթե սակլյար արտադրյալը տրված է A մատրիցով, որի համար՝

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

ապա՝

$$(x, y) = \Lambda\Upsilon^* = \lambda_1\bar{\upsilon}_1 + \ldots + \lambda_n\bar{\upsilon}_n$$

(*իրական թվերի դեպքում* $(x,y) = \Lambda \Upsilon^T = \lambda_1 \upsilon_1 + \ldots + \lambda_n \upsilon_n$) *և սկալյար արտադրյալը սահմանվում է Հայտնի բանաձևերով: Օրթոնորմալ բազիսի դեպքում՝*

$$(A)_{ij} = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} :$$

Ուստի միայն և միայն օրթոնորմալ բազիսի դեպքում է, որ սկալյար արտադրյալը տրվում է Հայտնի

$$(x,y) = \Lambda \Upsilon^* = \lambda_1 \bar{\upsilon}_1 + \ldots + \lambda_n \bar{\upsilon}_n$$

(*իրական թվերի դեպքում* ՝ $(x,y) = \Lambda \Upsilon^T = \lambda_1 \upsilon_1 + \ldots + \lambda_n \upsilon_n$) *բանաձևերով:*

Դիցուք $e_1, \ldots, e_n$*-ն օրթոնորմալ բազիս է* n*-չափանի* L *ունիտար* (*էվքլիդեսյան*) *տարածությունում: Եթե* $x \in L$, *ապա* $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$: *Բազմապատկելով* e_k*-ով և օգտվելով* $i \neq k \Rightarrow (e_k, e_i) = 0$ *պայմանից, ստանում ենք՝*

$$(x, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k) = \alpha_k,\ k = 1, \ldots, n:$$

Փաստորեն (x, e_k)*-ն* x*-ի* ***Ֆուրյեի գործակիցն*** *է:*

Դիցուք $e_1, \ldots, e_k$*-ն օրթոնորմալ Համակարգ է* n*-չափանի* L *ունիտար* (*էվքլիդեսյան*) *տարածությունում և* $k < n$: *Ընդլայնենք Համակարգը մինչև ամբողջ տարածության օրթոնորմալ բազիս՝* $e_1, \ldots, e_n$: *Կամայական* x*-ի Համար* L*-ից ունենք՝*

$$x = (x, e_1) e_1 + \ldots + (x, e_n) e_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

ուստի՝

$$(x,x) = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{\alpha}_n = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2:$$

Այս Հավասարությունը կոչվում է ***Պարսևալի***

Հավասարություն: *Քանի որ* $(x, e_i) = \alpha_i$, *ապա`*

$$(x, x) \geq \alpha_1\overline{\alpha}_1 + \ldots + \alpha_k\overline{\alpha}_k = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_k|^2 :$$

Այս անհավասարությունը կոչվում է **Բեսսելի** *անհավասարություն:*

Ունիտար (օրթոգոնալ) մատրիցներ

Դիցուք

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\text{-ն և } \varepsilon' = \begin{pmatrix} \acute{e}_1 \\ \acute{e}_2 \\ \vdots \\ \acute{e}_n \end{pmatrix}\text{-ը}$$

միևնույն ունիտար L տարածության օրթոնորմալ բազիսներ են, իսկ T-ն նրանց միջև անցման մատրից է, այսինքն՝

$$\varepsilon' = T\varepsilon \tag{35}$$

Նշանակենք T մատրիցի տարրերը α_{ij}-ներով: (35)-ից ստացվում է, որ

$$(\acute{e}_i, \acute{e}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm} e_m \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ik} \overline{\alpha}_{jm} (e_k, e_m) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \overline{\alpha}_{jk} \tag{36}$$

Դյուրին է տեսնել, որ վերջին հավասարության աջ մասը T մատրիցի i-րդ և j-րդ տողերի սկալյար արտադրյալն է, ուստի

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \overline{\alpha}_{jk} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = j \\ 0, & \text{եթե } i \neq j \end{cases},$$

այսինքն մատրիցի տողերը կազմում են օրթոնորմալ բազիս: Սա նշանակում է, որ $TT^* = E$ և ուրեմն $T^{-1} = T^*$:

Սահմանում: T մատրիցը կոչվում է **ունիտար**, եթե $T^{-1} = T^*$: Համարժեք սահմանում է՝ մատրիցը ունիտար է, եթե նրա տողերը կազմում են օրթոնորմալ բազիս:

Իրական թվերի դաշտի դեպքում անալոգ ձևով սահմանվում է *օրթոգոնալ մատրիցը, որի համար* $T^{-1} = T^{T}$*:*

Օրթոգոնալ մատրիցով են իրականացվում Հարթության պտույտները և որևէ ուղղի (որն անցնում է կորդինատային Համակարգի սկզբնակետով) նկատմամբ սիմետրիկ անդրադարձումը: Օրթոգոնալ են նաև տեղափոխության մատրիցները՝ 0,1*-մատրիցները, որոնց յուրաքանչյուր տող և սյուն պարունակում են ճիշտ մեկ Հատ* 1*:*

Ունիտար T *մատրիցի Համար տեղի ունի՝* $\det T \det T^{*} = 1$ *և ուստի*

$|\det T|^{2} = 1$*, այսինքն* $|\det T| = 1$*:*

(36) *Հավասարությունից Հետևում է նաև, որ եթե* ε *բազիսը օրթոնորմալ է, իսկ* T *անցման մատրիցն ունիտար է, ապա* $\varepsilon' = T\varepsilon$ *բազիսը նույնպես օրթոնորմալ է:*

Այսպիսով ստացանք, որ՝

օրթոնորմալ բազիսից օրթոնորմալ բազիս անցման մատրիցները դրանք ունիտար մատրիցներն են:

Օրթոգոնալ լրացում

Դիցուք L-ն ունիտար տարածություն է, $\dim L = n$ և M-ը նրա ոչ դատարկ ենթատարածություն է: Ասում են, որ $x \in L$ օրթոգոնալ է M-ին (նշանակում են $x \perp M$), եթե x-ն օրթոգոնալ է M-ի բոլոր տարրերին:

Նշանակենք՝

$$M^{\perp} = \{x \in L \mid x \perp M\}:$$

Այս բազմությունը կոչվում է M բազմության **օրթոգոնալ լրացում**: Օրթոգոնալ լրացումը գծային ենթատարածություն է: Իսկապես, եթե $x, y \in M^{\perp}$ և $z \in M$, ապա՝

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \underbrace{(x,z)}_{=0} + \mu \underbrace{(y,z)}_{=0} = 0,$$

ուստի, $\lambda x + \mu y \in M^{\perp}$:

Թեորեմ 23.

Եթե L_1-ը L ունիտար տարածության ենթատարածությունն է, ապա՝

$$L_1 \dotplus L_1^{\perp} = L$$

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ $L_1 \cap L_1^{\perp} = \{0\}$ և $L_1 + L_1^{\perp}$ գումարն ուղիղ է: Դիցուք $e_1, \ldots, e_k$-ը L_1-ի օրթոնորմալ բազիսն է, իսկ $e_{k+1}, \ldots, e_s$-ը $L_1^{\perp}$-ինը, ուստի $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_s$ համակարգը $L_1 \dotplus L_1^{\perp}$-ի օրթոնորմալ բազիսն է: Եթե $s = \dim L$, ապա թեորեմն ապացուցված է: Եթե $s < \dim L$, ապա $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_s$ բազիսը կարող ենք ընդլայնել մինչև L-ի օրթոնորմալ բազիս՝ $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n$: Պարզ է, որ $e_{s+1} \in L_1 \cap L_1^{\perp}$, քանի որ

e_{s+1}-ն օրթոգոնալ է և $e_1,\ldots,e_k$ և $e_{k+1},\ldots,e_s$ բազիսներին: Այստեղից հետևում է, որ $e_{s+1}=0$, ինչը հակասում է այն բանին, որ e_{s+1}-ը բազիսային տարր է: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք.

$$L_1^{\perp\perp}=L_1$$

Իսկապես, ակնհայտ է, որ $L_1\subseteq L_1^{\perp\perp}$: Ստուգենք, որ $L_1^{\perp\perp}\subseteq L_1$: Դիցուք $x\in L_1^{\perp\perp}$: Համաձայն թեորեմ 23-ի $x=x_1+x_2$, որտեղ $x_1\in L_1$ իսկ $x_2\in L_1^{\perp}$: Հաշվենք $(x_2,x)=(x_2,x_1)+(x_2,x_2)$: Այժմ՝ $(x_2,x)=0$, քանի որ x-ը $L_1^{\perp}$-ի օրթոգոնալ լրացումից է: Ակնհայտորեն՝ $(x_2,x_1)=0$, ուստի և $(x_2,x_2)=0$ և $x_2=0$: Ստանում ենք, որ $x=x_1$, ուրեմն՝ $x\in L_1$:

Թեորեմ 24.

L ունիտար տարածության L_1 և L_2 ենթատարածությունների համար տեղի ունի՝

$$(L_1+L_2)^{\perp}=L_1^{\perp}\cap L_2^{\perp}$$
$$(L_1\cap L_2)^{\perp}=L_1^{\perp}+L_2^{\perp}$$

Ապացույց. Դյուրին է տեսնել, որ բանաձևերը երկակի են և մեկը մյուսից ստացվում է կիրառելով օրթոգոնալ լրացման գործողությունը և Թեորեմ 23-ի հետևանքը: Ուստի, բավական է ապացուցել բանաձևերից մեկը: Ապացուցենք $(L_1+L_2)^{\perp}=L_1^{\perp}\cap L_2^{\perp}$ բանաձևը: Մենք միշտ կօգտվենք այն ակնհայտ փաստից, որ կամայական M_1 և M_2 ենթատարածությունների համար ճիշտ է՝ $M_1\subseteq M_2\Rightarrow M_2^{\perp}\subseteq M_1^{\perp}$:

Սկզբից ապացուցենք, որ $(L_1+L_2)^{\perp}\subseteq L_1^{\perp}\cap L_2^{\perp}$: Քանի որ՝ $L_1\subseteq L_1+L_2$, ապա $(L_1+L_2)^{\perp}\subseteq L_1^{\perp}$ և նույն ձևով $(L_1+L_2)^{\perp}\subseteq L_2^{\perp}$ և, հետևաբար, $(L_1+L_2)^{\perp}\subseteq L_1^{\perp}\cap L_2^{\perp}$:

Ապացուցենք այժմ, որ $L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq (L_1 + L_2)^\perp$: Ունենք, որ $L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq L_1^\perp$ և $L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq L_2^\perp$, ուրեմն՝ $L_1 \subseteq (L_1^\perp \cap L_2^\perp)^\perp$ և $L_2 \subseteq (L_1^\perp \cap L_2^\perp)^\perp$: Պարզ է, որ նաև՝ $L_1 + L_2 \subseteq (L_1^\perp \cap L_2^\perp)^\perp$: Այստեղից ստանում ենք՝ $(L_1^\perp \cap L_2^\perp)^{\perp\perp} = L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq (L_1 + L_2)^\perp$:

Համալուծ օպերատոր

Դիցուք տրված է $\mathcal{A} : L \to L$ գծային օպերատորը n-չափանի L ունիտար (էվքլիդեսյան) տարածությունում: Ֆիքսենք որևէ $\mathcal{E}$ օրթոնորմալ բազիս և կստանանք $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումը այդ բազիսում, այսինքն կստանանք A մատրիցը, որի համար $\mathcal{A}\mathcal{E} = A\mathcal{E}$ և կոմուտատիվ է հետևյալ դիագրամը՝

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{A}: & L & \to & L \\ & \mathcal{E} \updownarrow & & \mathcal{E} \updownarrow \\ A: & V_n(K) & \to & V_n(K) \end{array}$$

Սահմանենք մի նոր օպերատոր $\mathcal{B} : L \to L$ այնպես, որ լինի կոմուտատիվ ստորև բերված դիագրամը՝

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{B}: & L & \to & L \\ & \mathcal{E} \updownarrow & & \mathcal{E} \updownarrow \\ A^*: & V_n(K) & \to & V_n(K) \end{array}$$

որտեղ A^*-ը A մատրիցի համալուծն է, այսինքն ստացվում է A-ից շրջելով (տրանսպոնացնելով) և տարրերը համալուծներով փոխարինելով: Ակնհայտ է, որ այս ձևով սահմանվում է գծային օպերատոր, որը գործում է այսպես.

տրված $x \in L$ համար $\mathcal{B}x$-ը հաշվում ենք հետևյալ կերպ՝ վերցնում ենք x-ի բազիսային ներկայացումը $x = \Lambda\mathcal{E}$ և հաշվում ենք $\mathcal{B}x = (\Lambda A^*)\mathcal{E}$:

Դյուրին է ստուգել, որ $\mathcal{B}$ օպերատորը գծային է.

$$x_1, x_2 \in L, x_1 = \Lambda^1\mathcal{E}, x_2 = \Lambda^2\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{B}x_1 = (\Lambda^1 A^*)\mathcal{E}, \mathcal{B}x_2 = (\Lambda^2 A^*)\mathcal{E}$$

և

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda\Lambda^1 + \mu\Lambda^2)\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{B}(\lambda x_1 + \mu x_2) = ((\lambda\Lambda^1 + \mu\Lambda^2)A^*)\mathcal{E} =$$
$$((\lambda\Lambda^1)A^* + (\mu\Lambda^2)A^*)\mathcal{E} = (\lambda\Lambda^1)A^*\mathcal{E} + (\mu\Lambda^2)A^*\mathcal{E} =$$
$$\lambda((\Lambda^1)A^*\mathcal{E}) + \mu((\Lambda^2)A^*\mathcal{E}) = \lambda\mathcal{B}x_1 + \mu\mathcal{B}x_2$$

Դյուրին է նաև տեսնել, որ $\mathcal{B}$ օպերատորի և կամայական $x, y \in L$ համար տեղի ունի՝

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y)$$

Իսկապես, դիցուք $\mathcal{E}$ բազիսում $x = \Lambda\mathcal{E}$, $y = \Upsilon\mathcal{E}$: Ունենք՝ $\mathcal{A}x = (\Lambda A)\mathcal{E}$ և $\mathcal{B}y = (\Upsilon A^*)\mathcal{E}$: Այժմ՝ $(\mathcal{A}x, y) = (\Lambda A)\Upsilon^*$ և

$$(x, \mathcal{B}y) = \Lambda(\Upsilon A^*)^* = \Lambda(A\Upsilon^*) = (\Lambda A)\Upsilon^* = (\mathcal{A}x, y):$$

Մյուս կողմից $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y)$ պայմանից բխում է, որ եթե $\mathcal{E}$ բազիսում $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումը A մատրիցն է, ապա $\mathcal{B}$ օպերատորի ներկայացումը A^* է: Ապացուցենք դա: Դիցուք $\mathcal{B}$ օպերատորի ներկայացումը դա B մատրիցն է և $\mathcal{B}\mathcal{E} = B\mathcal{E}$: Դիցուք նաև $x = \Lambda\mathcal{E}$, $y = \Upsilon\mathcal{E}$: Այժմ՝

$$(\Lambda A)\Upsilon^* = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y) = \Lambda(\Upsilon B)^* = \Lambda(B^*\Upsilon^*) = (\Lambda B^*)\Upsilon^*$$

և ուրեմն՝

$$0 = (\Lambda A - \Lambda B^*)\Upsilon^* = (\Lambda(A - B^*))\Upsilon^*:$$

Քանի որ $x, y \in L$ կամայական են վերցնենք $y = (\Lambda(A - B^*))\mathcal{E}$, կստանանք՝

$$(\Lambda(A - B^*))(\Lambda(A - B^*))^* = 0$$

և հետևաբար՝ $\Lambda(A - B^*) = 0$: Վերջին հավասարությունը տեղի ունի կամայական Λ-ի համար, ուստի $A - B^* = 0$ և $A = B^*$ ինչը համարժեք է $A^* = B$ պայմանին:

Սահմանում. L ունիտար (էվքլիդեսյան) տարածությունում գործող A գծային օպերատորի **համալուծ** օպերատոր է կոչվում A^* գծային *օպերատորը, որի համար տեղի ունի*

$$\forall x, y \in L \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y):$$

Փաստորեն, մենք արդեն վերն ապացուցել ենք, որ կամայական $\mathcal{A}$ գծային օպերատորի համալուծ օպերատորը գոյություն ունի և օրթոնորմալ բազիսում համալուծ օպերատորը ներկայացվում է համալուծ մատրիցով (իրական թվերի դեպքում էվքլիդեսյան տարածություններում համալուծ մատրիցը փոխարինվում է շրջվածով):

Համալուծ օպերատորը սահմանվում է միարժեքորեն: **Ի**սկապես, եթե

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}_1^* y) = (x, \mathcal{A}_2^* y),$$

ապա $(x, (\mathcal{A}_1^* - \mathcal{A}_2^*)y) = 0$ և քանի որ x-ը կամայական է

$$((\mathcal{A}_1^* - \mathcal{A}_2^*)y, (\mathcal{A}_1^* - \mathcal{A}_2^*)y) = 0:$$

Ուստի, $(\mathcal{A}_1^* - \mathcal{A}_2^*)y = 0$ բոլոր $y \in L$ համար և $\mathcal{A}_1^* - \mathcal{A}_2^* = 0$ ու $\mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}_2^*$:

Դյուրին է ստուգել հետևյալ հատկությունները.

1. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
2. $(\lambda\mathcal{A})^* = \overline{\lambda}\mathcal{A}^*$
3. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$

Նորմալ օպերատորներ

Սահմանում: L ունիտար (էվքլիդեսյան) տարածությունում գործող A գծային օպերատորը կոչվում է նորմալ, եթե այն տեղափոխելի է իր համալուծի հետ, այսինքն՝

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

Այստեղից միանգամից բխում է, որ օպերատորը նորմալ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումն օրթոնորմալ բազիսում բավարարում է $AA^* = A^*A$ պայմանին:

Դյուրին է տեսնել, որ կամայական $f(\theta)$, $g(\theta) \in K[\theta]$ բազմանդամների համար տեղի ունի՝

$$f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}^*) = g(\mathcal{A}^*)f(\mathcal{A}):$$

Թեորեմ 25.

Դիցուք $\mathcal{A}$-ն նորմալ օպերատոր է

1. λ-ն $\mathcal{A}$-ի սեփական արժեքն է $\Leftrightarrow$ $\bar{\lambda}$-ն $\mathcal{A}^*$-ի սեփական արժեքն է

2. x-ը λ սեփական արժեքին համապատասխանող $\mathcal{A}$-ի սեփական վեկտորն է $\Leftrightarrow$ x-ը $\bar{\lambda}$ սեփական արժեքին համապատասխանող $\mathcal{A}^*$-ի սեփական վեկտորն է

3. տարբեր սեփական արժեքներին

Համապատասխանող սեփական վեկտորները օրթոգոնալ են:

Ապացույց. Դիցուք x-ը λ սեփական արժեքին համապատասխանող $\mathcal{A}$-ի սեփական վեկտորն է, այսինքն՝

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x = 0, x \neq 0$$

(այստեղ $\mathcal{I}$-ն միավոր օպերատորն է և $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}$): Պարզ է ,որ $(\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})^* = \mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$ և

$$0 = ((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x) =$$
$$((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x, (\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})^*x) = ((\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x), x) =$$
$$((\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x, x) = ((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})x, x) =$$
$$((\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})x, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^*x) = ((\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})x, (\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})x)$$

Որեմն՝ $(\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})x = 0$ և մենք ապացուցեցինք 1 և 2 պնդումները:

Ապացուցենք 3-ը: Դիցուք $\mathcal{A}x = \lambda x$, $x \neq 0$, $\mathcal{A}y = \mu y$, $y \neq 0$ և $\lambda \neq \mu$: Այժմ՝

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) = (x, \overline{\mu}y) = \mu(x,y)$$

և $(\lambda - \mu)(x,y) = 0$: Քանի որ $\lambda \neq \mu$, ապա վերջին հավասարությունից ստանում ենք, որ $(x,y) = 0$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 26.

Կամայական $\mathcal{A}$ նորմալ օպերատորի համար L ունիտար (կոմպլեքս թվային դաշտի նկատմամբ) տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս կազմված սեփական վեկտորներից:

Ապացույց. $\mathcal{A}$ օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամն անպայման ունի արմատ՝ λ_1, ուստի գոյություն ունի $e_1 \neq 0$, որ $\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1$: Այժմ

e_1-ով ծնված ենթատարածությունը նշանակենք L_1-ով: Պարզ է, որ $\dim L_1 = 1$: Ապացուցենք, որ $L_1^\perp$-ն ինվարիանտ է $\mathcal{A}$-ի նկատմամբ: Դիցուք $x \in L_1^\perp$, ապա՝

$$(e_1, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* e_1, x) = (\overline{\lambda}_1 e_1, x) = \overline{\lambda}_1 (e_1, x) = 0$$

և ուստի՝ $\mathcal{A}x \in L_1^\perp$: Ակնհայտ է, որ $\dim L_1^\perp = \dim L - 1$:

Քանի որ $L_1^\perp$-ն ինվարիանտ է $\mathcal{A}$-ի նկատմամբ, ապա $\mathcal{A}$-ն գծային նորմալ օպերատոր է $L_1^\perp$-ի վրա և վերը նշված եղանակով $L_1^\perp$-ում կգտնվի $\mathcal{A}$-ի սեփական վեկտոր e_2, որով ծնված ենթատարածությունը $L_1^\perp$-ում կնշանակենք L_2-ով, և $L_2^\perp$-ը կլինի ինվարիանտ $\mathcal{A}$-ի նկատմամբ: Դյուրին է տեսնել, որ $(e_1, e_2) = 0$ և $L_1^\perp$-ում $\dim L_2^\perp = \dim L_1^\perp - 1$: Շարունակելով այս պրոցեսը կստանանք $e_1, \ldots, e_{\dim L}$ զույգ առ զույգ օրթոգոնալ սեփական վեկտորների (և ուստի ոչ զրոյական) մի համակարգ, որը կկազմի L տարածության բազիս: Մնում է հայտնի եղանակով նորմալիզացնել վեկտորները, որ նրանց նորմերը դառնան հավասար 1-ի: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք.

Գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս, որում նորմալ օպերատորը ներկայացվում է անկյունագծային մատրիցով:

Նորմալ օպերատորներն էվքլիդեսյան տարածություններում

Տեսնենք այժմ, թե ինչ տեսքի մատրիցով է ներկայացվում նորմալ օպերատորն էվքլիդեսյան տարածությունում, այսինքն, երբ թվային դաշտն իրական թվերի դաշտն է: Ճիշտ այնպես, ինչպես վարվեցինք իրական Ժորդանյան նորմալ ձևի կառուցման ժամանակ, ներդնենք մեր էվքլիդեսյան n-չափանի L տարածությունը համապատասխան n-չափանի կոմպլեքս տարածության մեջ: Ավելի ստույգ, ֆիքսենք L-ում որևէ օրթոնորմալ բազիս՝ $e_1,\dots,e_n$: L-ը կլինի իզոմորֆ՝

$$V_n(R) = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_i \in R, i = 1,2,\dots,n\}$$

տարածությանը: Պարզ է, որ՝

$$V_n(R) \subset V_n(\mathbb{C}) = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{C},\ i = 1,2,\dots,n\}$$

և

$$L \subset \tilde{L} = \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_j \in \mathbb{C},\ j = 1,2,\dots,n\}:$$

Ակնհայտորեն, $V_n(\mathbb{C})$-ն իզոմորֆ է $\tilde{L}$-ին: Դյուրին է ստուգել, որ $e_1,\dots,e_n$-ն օրթոնորմալ բազիս է նաև $\tilde{L}$-ում: Շարունակենք սկալյար արտադրյալը L-ից մինչև $\tilde{L}$ հետևյալ կերպ՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ և $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, ապա $(x,y) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \dots + \alpha_n\bar{\beta}_n$: Երբ $x,y \in L$ սկալյար արտադրյալը համընկնում է L-ի սկալյար արտադրյալի հետ: $\mathcal{A}$ օպերատորը շարունակենք $\tilde{L}$-ի վրա հետևյալ կերպ՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \tilde{L}$, ապա $\mathcal{A}x = \alpha_1\mathcal{A}e_1 + \dots + \alpha_n\mathcal{A}e_n$ (դյուրին է տեսնել, որ նման ձևով կարելի է շարունակել կամայական գծային օպերատոր, որ սահմանված է L-ի վրա): Ակնհայտ է, որ դա գծային օպերատոր է: Շարունակված օպերատորը նշանակենք $\mathcal{B}$-ով: Ակնհայտ է, որ $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ L-ի վրա: Շարունակենք նաև $\mathcal{A}^*$ օպերատորը և նշանակենք դրա շարունակությունը $\mathcal{B}_1$-ով: Ցույց տանք, որ $\mathcal{B}_1$-ը *համընկնում է $\mathcal{B}^*$-ի հետ: Իսկապես, դիցուք $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ և $y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$, ապա՝*

$$(\mathcal{B}x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{B} e_i, y \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A} e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j (\mathcal{A} e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j (e_i, \mathcal{A}^* e_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j (e_i, \mathcal{B}_1 e_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathcal{B}_1 e_j \right) = (x, \mathcal{B}_1 y)$$

Համալուծ օպերատորի միակությունից ստանում ենք, որ $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^*$: Ապացուցենք այժմ, որ $\mathcal{B}$ օպերատորը նույնպես նորմալ է: Իրոք, կամայական $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in \tilde{L}$ համար ունենք՝

$$\mathcal{B}^* \mathcal{B} x = \mathcal{B}^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{B} e_i = \mathcal{B}^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A} e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{B}^* (\mathcal{A} e_i) \overset{\text{քանի որ } \mathcal{A}e_i \in L}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}^* \mathcal{A} e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A} \mathcal{A}^* e_i = \mathcal{A} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}^* e_i = \mathcal{B} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{B}^* e_i = \mathcal{B} \mathcal{B}^* x$$

Նկատենք նաև, որ եթե

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

օրթոնորմալ բազիսում $\mathcal{A}$ օպերատորը ներկայացված է A իրական մատրիցով, ապա $\mathcal{B}$ օպերատորը ներկայացված է այդ նույն մատրիցով, իսկ $\mathcal{B}^*$ օպերատորը A^T մատրիցով: Իսկապես,

$$\mathcal{B}\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} e_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B} e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} e_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A} e_n \end{pmatrix} = \mathcal{A}\mathcal{E} = A\mathcal{E}$$

և

$$\mathcal{B}^*\mathcal{E} = \mathcal{A}^*\mathcal{E} = A^T\mathcal{E}:$$

Դիցուք $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in \tilde{L}$ *տարրը* $\mathcal{B}$ *օպերատորի սեփական վեկտորն է, որ համապատասխանում է* λ *սեփական արժեքին: Նշանակենք* $\Lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *և* $x = \Lambda\mathcal{E}$*: Քանի որ* $\mathcal{B}x = \lambda x$*, ապա* $\Lambda A = \lambda\Lambda$*: Նշանակենք* A *մատրիցի տարրերը* β_{ij} *նշաններով:* ΛA *վեկտորի* j*-րդ տարրը հավասար է* $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} = \lambda\alpha_j$*: Վերջին առնչության մեջ անցնենք համալուծներին հաշվի առնելով, որ* β_{ij} *թվերն իրական են: Կստանանք* $\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \beta_{ij} = \bar{\lambda}\bar{\alpha}_j$*, ինչը համարժեք է* $\bar{\Lambda}A = \bar{\lambda}\bar{\Lambda}$ *առնչությանը: Սա նշանակում է, որ* $\mathcal{B}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$*: Այսինքն, եթե* $x \in \tilde{L}$ *տարրը* $\mathcal{B}$ *օպերատորի* λ *սեփական արժեքին համապատասխան սեփական վեկտորն է, ապա* $\bar{x}$*-ը* $\mathcal{B}$ *օպերատորի սեփական վեկտորն է, որ համապատասխանում է* $\bar{\lambda}$*-ին:*

Համաձայն **Թեորեմ 26**-*ի և դրա հետևանքի* $\tilde{L}$ *ունիտար տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս կազմված* $\mathcal{B}$ *օպերատորի սեփական վեկտորներից: Այդ բազիսում* $\mathcal{B}$ *օպերատորի մատրիցը կունենա հետևյալ անկյունագծային տեսքը՝*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \bar{\lambda}_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_m & & & & \\ & & & & \bar{\lambda}_m & & & \\ & & & & & \lambda_{2m+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (37)$$

որտեղ $i = 1, 2, \ldots, m$ *համար* λ_i*-ն կոմպլեքս թիվ է և* $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_i$*, մնացած*

$\lambda_{2m+1},\ldots,\lambda_n$ *թվերն իրական են: Ընդ որում $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ զույգերը $i = 1,2,\ldots,m$ համար դասավորված են այնպես, որ $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\} \cap \{\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m\} = \varnothing$: Ուստի,*

$$\forall i,j \in \{1,2,\ldots,m\} \Rightarrow \lambda_i \neq \bar{\lambda}_j:$$

Օրթնորմալ բազիսի տարրերը նշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$d_1,h_1,\ldots,d_m,h_m,c_{2m+1},\ldots,c_n:$$

Ունենք՝ $\mathcal{B}d_i = \lambda_i d_i$, $\mathcal{B}h_i = \bar{\lambda}_i h_i$, $i = 1,2,\ldots,m$ և

$$\mathcal{B}c_{2m+1} = \lambda_{2m+1}c_{2m+1},\ldots,\mathcal{B}c_n = \lambda_n c_n:$$

Դիտարկենք՝

$$d_1,\bar{d}_1,\ldots,d_m,\bar{d}_m,c_{2m+1},\ldots,c_n$$

համակարգը: Ապացուցենք, որ այս համակարգը ևս օրթնորմալ բազիս է: Ակնհայտ է, որ $\|x\| = \|\bar{x}\|$ կամայական x-ի համար $\tilde{L}$-ից: Ուստի՝

$$d_1,\bar{d}_1,\ldots,d_m,\bar{d}_m,c_{2m+1},\ldots,c_n$$

համակարգը նորմավորված է և չի պարունակում զրոյական տարրեր: Քանի որ $i \neq j \Rightarrow (d_i,d_j) = 0$ և $\overline{(d_i,d_j)} = (\bar{d}_i,\bar{d}_j)$, ապա $i \neq j \Rightarrow (\bar{d}_i,\bar{d}_j) = 0$: Վերը ստացել ենք, որ

$$\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\} \cap \{\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m\} = \varnothing,$$

*ուստի, համաձայն Թեորեմ **25**-ի **3**-րդ կետի, ստանում ենք, որ $i,j \in \{1,2,\ldots,m\} \Rightarrow (d_i,\bar{d}_j) = 0$: Վերջապես, քանի որ $\{\lambda_{2m+1},\ldots,\lambda_n\} \cap \{\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m\} = \varnothing$, ապա կրկին համաձայն Թեորեմ **25**-ի **3**-րդ կետի՝ $(\bar{d}_i,c_j) = 0$: Այսպիսով՝*

$$d_1,\bar{d}_1,\ldots,d_m,\bar{d}_m,c_{2m+1},\ldots,c_n$$

համակարգն օրթնորմավորված է և չի պարունակում զրոյական տարր, ուստի այն օրթնորմալ բազիս է: Ունենք, որ $\mathcal{B}d_i = \lambda_i d_i$, $\mathcal{B}\bar{d}_i = \bar{\lambda}_i\bar{d}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, ուրեմն այս բազիսում ևս $\mathcal{B}$ օպերատորի մատրիցը կունենա վերը նշված անկյունագծային տեսքը: Ակնհայտ է, որ $\tilde{L}$-ը հանդիսանում է բազիսային տարրերով ծնված 1-չափանի ինվարիանտ ենթատարածությունների ուղիղ գումար: Նաև $d_j, \bar{d}_j$ զույգերով ծնված 2-չափանի ենթատարածությունները կլինեն ինվարիանտ և դրանց ուղիղ գումարը $c_{2m+1}, \dots, c_n$ տարրերով ծնված 1-չափանի ինվարիանտ ենթատարածությունների հետ կլինի հավասար $\tilde{L}$-ին:

Դիտարկենք այժմ որևէ $\lambda_j \neq \bar{\lambda}_j$ զույգը $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ և համապատասխանող $d_j, \bar{d}_j$ սեփական վեկտորները: Հարմարության համար նշանակենք $\lambda_j = \lambda$, $\bar{\lambda}_j = \bar{\lambda}$, $d_j = d$ և $\bar{d}_j = \bar{d}$: Դիցուք $\lambda = \sigma + i\tau$, ընդ որում պարզ է, որ $\tau \neq 0$ և միշտ կարող ենք վերցնել $\tau > 0$: Հիշեցնենք, որ $\mathcal{B}d = \lambda d$, $\mathcal{B}\bar{d} = \bar{\lambda}\bar{d}$ և $(d, \bar{d}) = 0$, $\|d\| = \|\bar{d}\| = 1$: Փոխարինենք d և $\bar{d}$ տարրերը համապատասխանաբար $\sqrt{2}\,d$ և $\sqrt{2}\,\bar{d}$ տարրերով: Դրանց համար տեղի ունի $\mathcal{B}(\sqrt{2}\,d) = \lambda(\sqrt{2}\,d)$, $\mathcal{B}(\sqrt{2}\,\bar{d}) = \bar{\lambda}(\sqrt{2}\,\bar{d})$ և $(\sqrt{2}\,d, \sqrt{2}\,\bar{d}) = 0$, $\left\|\sqrt{2}\,d\right\| = \left\|\sqrt{2}\,\bar{d}\right\| = \sqrt{2}$: Ուստի, եթե բազիսում $d_j, \bar{d}_j$ զույգը փոխարինենք $\sqrt{2}\,d_j, \sqrt{2}\,\bar{d}_j$ զույգով $\mathcal{B}$ օպերատորի մատրիցի տեսքը կմնա անփոփոխ (բազիսը կմնա օրթոգոնալ, բայց ոչ նորմավորված): Կառուցենք $f = \frac{1}{2}(d + \bar{d})$ և $g = \frac{1}{2i}(d - \bar{d})$ տարրերը: Պարզ է, որ $d = f + ig$, $\bar{d} = f - ig$ և $d, \bar{d}$ համակարգի թաղանթը և f, g համակարգի թաղանթը համընկնում են: Ակնհայտ է, որ f, g տարրերը էվքլիդեսյան L տարածությունից են, ուստի՝ $\mathcal{B}f = \mathcal{A}f$ և $\mathcal{B}g = \mathcal{A}g$: Դրանք օրթոգոնալ են քանի որ՝

$$(f, g) = -\frac{1}{4i}(d + \bar{d}, d - \bar{d}) =$$

$$-\frac{1}{4i}((d, d) - (d, \bar{d}) + (\bar{d}, d) - (\bar{d}, \bar{d})) = 0:$$

Նաև՝

$$(f,f) = \frac{1}{4}(d+\bar{d}, d+\bar{d}) = \frac{1}{4}((d,d)+(\bar{d},\bar{d})) = 1$$

և նմանապես՝

$$(g,g) = -\frac{1}{4i^2}(d-\bar{d}, d-\bar{d}) = \frac{1}{4}((d,d)+(\bar{d},\bar{d})) = 1:$$

Վերջապես՝

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2}\mathcal{A}(d+\bar{d}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}d+\mathcal{A}\bar{d}) = \frac{1}{2}(\lambda d+\bar{\lambda}\bar{d}) =$$
$$\frac{1}{2}((\sigma+i\tau)d+(\sigma-i\tau)\bar{d}) = \frac{1}{2}(\sigma d+\sigma\bar{d}+i\tau d-i\tau\bar{d}) =$$
$$\sigma\frac{1}{2}(d+\bar{d})-\tau\frac{1}{2i}(d-\bar{d}) = \sigma f-\tau g$$

և

$$\mathcal{A}g = \frac{1}{2i}\mathcal{A}(d-\bar{d}) = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}d-\mathcal{A}\bar{d}) = \frac{1}{2i}(\lambda d-\bar{\lambda}\bar{d}) =$$
$$\frac{1}{2i}((\sigma+i\tau)d-(\sigma-i\tau)\bar{d}) = \frac{1}{2i}(\sigma d-\sigma\bar{d}+i\tau d+i\tau\bar{d}) =$$
$$\sigma\frac{1}{2i}(d-\bar{d})+i\tau\frac{1}{2i}(d+\bar{d}) = \sigma f+\tau g:$$

Այսպիսով՝

$$\mathcal{B}f = \mathcal{A}f = \sigma f-\tau g$$
$$\mathcal{B}g = \mathcal{A}g = \sigma f+\tau g$$

և

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}f \\ \mathcal{B}g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{A}f \\ \mathcal{A}g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Ստացանք, որ f,g համակարգը դա իրական օրթնորմալ բազիս է $d,\bar{d}$ զույգով ծնված 2-չափանի ինվարիանտ ենթատարածության համար և

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

տեսքի վանդակը (37) մատրիցում կփոխարինվի

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} \tag{38}$$

տեսքի վանդակով:

Վերցնենք այժմ կամայական $c_j \in \{c_{2m+1},\ldots,c_n\}$ և λ_j-ն համապատասխան սեփական արժեքն է (37) մատրիցում: Ինչպես գիտենք, $\bar{c}_j$ տարրը նույնպես $\mathcal{B}$ օպերատորի սեփական վեկտորն է, որ համապատասխանում է $\bar{\lambda}_j = \lambda_j$ իրական սեփական արժեքին: Որեմն, $\bar{c}_j$-ն պատկանում է $c_{2m+1},\ldots,c_n$ տարրերով ծնված 1-չափանի օրթոգոնալ ենթատարածություններից մեկին:

Դիցուք $\bar{c}_j = \mu c_j$: Պարզ է, որ $\|\bar{c}_j\| = \|c_j\|$ և $|\mu| = 1$, այսինքն $\mu = e^{i\varphi}$: Ստանում ենք՝ $e^{i\varphi/2}c_j = e^{-i\varphi/2}\bar{c}_j$ և $\overline{e^{i\varphi/2}c_j} = e^{-i\varphi/2}\bar{c}_j = e^{i\varphi/2}c_j$, ուստի $e^{i\varphi/2}c_j$ տարրն իրական է, այսինքն պատկանում է L-ին: Նորմավորենք $e^{i\varphi/2}c_j$-ն և $\tilde{L}$-ի բազիսում փոխարինենք c_j-ն $e^{i\varphi/2}c_j$-ով: Պարզ է, որ $\mathcal{B}(e^{i\varphi/2}c_j) = \lambda_j(e^{i\varphi/2}c_j)$ և (37) մատրիցը չի փոխվում:

Դիցուք $\bar{c}_j = \mu c_k$, որտեղ $j \neq k$: Ինչպես գիտենք, $\mathcal{B}c_j = \lambda_j c_j$ և $\mathcal{B}\bar{c}_j = \lambda_j \bar{c}_j$, քանի որ $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$: Մյուս կողմից՝ $\mathcal{B}c_k = \lambda_k c_k$: Սակայն $\bar{c}_j = \mu c_k$, ուստի $\lambda_j = \lambda_k$: Քանի որ $(c_j, c_k) = 0$, c_j-ն և $\bar{c}_j$-ն գծորեն անկախ են: Վերցնենք $f = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,c_j + \sqrt{2}\,\bar{c}_j)$ և $g = \frac{1}{2i}(\sqrt{2}\,c_j - \sqrt{2}\,\bar{c}_j)$: Ակնհայտ է, որ f, g համակարգը նույնպես գծորեն անկախ է, քանի որ $\sqrt{2}\,c_j = f + ig$, $\sqrt{2}\,\bar{c}_j = f - ig$ և $\sqrt{2}\,c_j, \sqrt{2}\,\bar{c}_j$ և f, g համակարգերի թաղանթները նույնն են: Պարզ է նաև, որ f, g տարրերը էվքլիդեսյան L տարածությունից են, ուստի $\mathcal{B}f = \mathcal{A}f$ և $\mathcal{B}g = \mathcal{A}g$:

Ունենք, որ՝ $(\sqrt{2}\,c_j, \sqrt{2}\,\bar{c}_j) = 0$ և $\left\|\sqrt{2}\,c_j\right\| = \left\|\sqrt{2}\,\bar{c}_j\right\| = \sqrt{2}$: Որեմն՝

$$(f,g) = -\frac{1}{4i}(\sqrt{2}\,c_j + \sqrt{2}\,\bar{c}_j, \sqrt{2}\,c_j - \sqrt{2}\,\bar{c}_j) =$$

$$-\frac{1}{4i}((\sqrt{2}\,c_j, \sqrt{2}\,c_j) - (\sqrt{2}\,\bar{c}_j, \sqrt{2}\,\bar{c}_j)) \;\; = 0:$$

Նաև՝

$$(f,f) = \frac{1}{4}(\sqrt{2}\,c_j + \sqrt{2}\,\bar{c}_j, \sqrt{2}\,c_j + \sqrt{2}\,\bar{c}_j) =$$

$$\frac{1}{4}((\sqrt{2}\,c_j, \sqrt{2}\,c_j) + (\sqrt{2}\,\bar{c}_j, \sqrt{2}\,\bar{c}_j)) \;\; = 1$$

և նմանապես՝

$$(g,g) = -\frac{1}{4i^2}(\sqrt{2}\,c_j - \sqrt{2}\,\bar{c}_j, \sqrt{2}\,c_j - \sqrt{2}\,\bar{c}_j) =$$

$$\frac{1}{4}((\sqrt{2}\,c_j, \sqrt{2}\,c_j) + (\sqrt{2}\,\bar{c}_j, \sqrt{2}\,\bar{c}_j)) \;\; = 1:$$

Ուրեմն f, g համակարգն օրթոնորմավորված է: Վերջապես՝

$$\mathcal{B}f = \frac{1}{2}\mathcal{B}(\sqrt{2}\,c_j + \sqrt{2}\,\bar{c}_j) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\mathcal{B}c_j + \sqrt{2}\,\mathcal{B}\bar{c}_j) =$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\lambda_j c_j + \sqrt{2}\,\lambda_j \bar{c}_j) = \lambda_j f$$

և նմանապես $\mathcal{B}g = \lambda_j g$: $\tilde{L}$-ի օրթոնորմալ բազիսում կփոխարինենք c_j, c_k զույգը f, g զույգով ստանալով նորից օրթոնորմալ բազիս, որում (37) մատրիցի տեսքը մնում է անփոփոխ:

Այսպիսով տեսանք, որ $\tilde{L}$-ում գոյություն ունի իրական օրթոնորմալ բազիս, որում $\mathcal{B}$ օպերատորի մատրիցն ունի (37) տեսքը: Քանի որ բազիսը իրական է և իրական է մատրիցը, ապա ակնհայտորեն բազիսը կլինի նաև L տարածության բազիս և (37) մատրիցը կներկայացնի $\mathcal{A}$ օպերատորը:

Փաստորեն մենք ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 27.

Էվքլիդեսյան (իրական դաշտի նկատմամբ) տարածությունում նորմալ օպերատորի համար գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս, որում օպերատորի մատրիցը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$\begin{pmatrix}
\sigma_1 & -\tau_1 & & & & & & & \\
\tau_1 & \sigma_1 & & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & & \\
& & & \sigma_m & -\tau_m & & & & \\
& & & \tau_m & \sigma_m & & & & \\
& & & & & \lambda_{2m+1} & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & \lambda_n
\end{pmatrix}$$

որտեղ $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $\lambda_2 = \sigma_1 - i\tau_1, \ldots, \lambda_{2m-1} = \sigma_m + i\tau_m$, $\lambda_{2m} = \sigma_m - i\tau_m$, $\lambda_{2m+1}, \ldots, \lambda_n$ **թվերը** $\mathcal{A}$ **օպերատորի բոլոր սեփական արժեքներն են, ընդ որում՝** $\tau_j > 0, j = 1, 2, \ldots, m$**։**

Հիմնվելով այս թեորեմի վրա կարելի է տալ նորմալ օպերատորների գործողության երկրաչափական իմաստի բովանդակալից մեկնաբանությունը էվքլիդեսյան տարածության դեպքում: Դյուրին է տեսնել, որ

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

մատրիցը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} & -\frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \\ \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} & \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \end{pmatrix} = |\lambda|\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

որտեղ $\cos\varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$, $\sin\varphi = \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} > 0$*: Հայտնի է, որ այս տեսակի մատրիցները "պտտում" են հարթությունը* φ *անկյունով և* $|\lambda|$ *անգամ "ձգում" են այն: Սա նշանակում է, որ* L *տարածությունը տրոհվում է մի շարք փոխուղղահայաց հարթությունների և ուղիղների: Օպերատորը "ձգում" և "պտտում" է այդ հարթությունները, իսկ ուղիղները միայն "ձգում" է:*

Ունիտար (օրթոգոնալ) օպերատորներ

Սահմանում: L ունիտար (օրթոգոնալ) տարածությունում գործող $\mathcal{A}$ գծային օպերատորը կոչվում է **ունիտար (օրթոգոնալ)**, եթե բոլոր $x \in L$ համար տեղի ունի

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x) \tag{39}$$

Այսինքն, ունիտար օպերատորը պահպանում է տարրերի երկարությունները (նորմերը)։ Ապացուցենք, որ այն պահպանում է նաև տարրերի միջև "անկյունները"։ Ավելի ստույգ, ապացուցենք, որ (39)-ը համարժեք է հետևյալ պայմանին՝

$$\forall x, y \in L \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y) \tag{40}$$

Պարզ է, որ (39)-ը բխում է (40)-ից։ Ապացուցենք, որ (40)-ը (39)-ի հետևանքն է։

Դիցուք $x, y \in L$ կամայական տարրեր են։ Ունենք՝

$$(\mathcal{A}(x+y), \mathcal{A}(x+y)) \; = (x+y, x+y),$$

ուրեմն՝

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) + (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) + (\mathcal{A}y, \mathcal{A}x) + (\mathcal{A}y, \mathcal{A}y) =$$

$$(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

և

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) + (\mathcal{A}y, \mathcal{A}x) = (x, y) + (y, x) \tag{41}$$

Ունենք նաև՝

$$(\mathcal{A}(x+iy), \mathcal{A}(x+iy)) \; = (x+iy, x+iy)$$

և

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) - i(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) + i(\mathcal{A}y, \mathcal{A}x) - i^2(\mathcal{A}y, \mathcal{A}y) =$$

$$(x, x) - i(x, y) + i(y, x) - i^2(y, y)։$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) - (\mathcal{A}y, \mathcal{A}x) = (x, y) - (y, x) \qquad (42)$$

Եթե տարածությունը օրթոգոնալ է (այսինքն թվային դաշտը իրական է), ապա (41)-ը կարտագրենք որպես $2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = 2(x, y)$ և (40)-ը ստույգ է:

Եթե տարածությունը ունիտար է (թվային դաշտը կոմպլեքս է), ապա գումարելով իրար (41)-ը և (42)-ը կստանանք (40)-ը:

Այսպիսով տեսնում ենք, որ որպես ունիտար (օրթոգոնալ) օպերատորի սահմանում կարելի է վերցնել նաև (40)-ը:

Դիցուք $\mathcal{A}$-ն ունիտար է: Որեմն՝

$$(x, y) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) \text{ և } (x, (\mathcal{I} - \mathcal{A}^*\mathcal{A})y) = 0$$

կամայական $x, y \in L$ համար: Մասնավորապես, երբ $x = (\mathcal{I} - \mathcal{A}^*\mathcal{A})y$ ստանում ենք՝

$$((\mathcal{I} - \mathcal{A}^*\mathcal{A})y, (\mathcal{I} - \mathcal{A}^*\mathcal{A})y) = 0$$

և $(\mathcal{I} - \mathcal{A}^*\mathcal{A})y = 0$ բոլոր $y \in L$ համար: Սա նշանակում է, որ $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ և $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$: Նաև ստանում ենք, որ $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ և $\mathcal{A}$ օպերատորը նորմալ է:

Մյուս կողմից, եթե $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, ապա $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ և $(x, x) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)$ և օպերատորը ունիտար է: Ուստի՝

1. $\mathcal{A}$ օպերատորն ունիտար է $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$

2. ունիտար օպերատորը նորմալ է:

Դիցուք $\mathcal{E}$-ն L տարածության օրթոնորմալ բազիսն է և A-ն $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումն է այդ բազիսում: $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ պայմանից անմիջապես բխում է, որ $A^* = A^{-1}$ և ուրեմն A մատրիցն ունիտար (օրթոգոնալ) է: Քանի որ արդեն պարզել ենք, որ ունիտար մատրիցներն օրթոնորմալ բազիսից օրթոնորմալ բազիս անցման մատրիցներն են, ապա դժվար չէ կռահել, որ այդ նույն հատկությամբ են օժտված ունիտար օպերատորները: Իսկապես, դիցուք

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}:$$

Ունենք $(e_i, e_j) = (\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j)$, ուստի՝

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}:$$

Դյուրին է նկատել, որ ունիտար օպերատորների բազմությունը (միևնույն L-ի վրա սահմանված) կազմում է խումբ օպերատորների բազմապատկման (հաջորդաբար կիրառման) գործողության նկատմամբ: Այսինքն, միավոր օպերատորը ունիտար է, ունիտար օպերատորների արտադրյալը ունիտար օպերատոր է՝

$$(x,x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{B}(\mathcal{A}x), \mathcal{B}(\mathcal{A}x)) = (\mathcal{AB}x, \mathcal{AB}x)$$

և $\mathcal{A}^{-1}$-ն ունիտար է՝

$$(x,x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1}x, \mathcal{A}^{-1}x) = (x,x):$$

Դիցուք $\mathcal{A}$-ն ունիտար օպերատոր է և λ-ն նրա սեփական արժեքն է: Գոյություն ունի $x \neq 0$, որ $\mathcal{A}x = \lambda x$: Հետևաբար՝

$$(x,x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x,x)$$

և $|\lambda| = 1$: Սա նշանակում է, որ իրական թվերի դաշտի դեպքում $\lambda = \pm 1$, իսկ կոմպլեքս թվերի դաշտի դեպքում $\lambda = \sigma + i\tau$, $\sigma^2 + \tau^2 = 1$:

Ունիտար (օրթոգոնալ) օպերատորի սեփական

արժեքների մոդուլը հավասար է մեկի:

Քանի որ ունիտար օպերատորը նորմալ է, ապա Թեորեմ 26-ը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

կամայական ունիտար A մատրիցի համար գոյություն ունի ունիտար Q մատրից, այնպիսի, որ $Q^{-1}AQ$-ն ունի անկյունագծային տեսք և անկյունագծային տարրերի մոդուլը հավասար է 1-ի:

Իրական թվերի դաշտի դեպքում, այսինքն երբ օպերատորն օրթոգոնալ է, կվարվենք այնպես, ինչպես նորմալ օպերատորների դեպքում: Ֆիքսելով L էվքլիդեսյան տարածության մեջ $e_1,\dots,e_n$ օրթոնորմալ բազիսը կընդլայնենք L էվքլիդեսյան տարածությունը մինչև $\tilde{L}$ ունիտար տարածությունը: Ինչպես գիտենք՝

$$L = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_i \in R, i = 1,\dots,n\}$$

և

$$\tilde{L} = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1,\dots,n\}:$$

Հայտնի եղանակով ընդլայնենք $\mathcal{A}$ օրթոգոնալ օպերատորը մինչև $\tilde{L}$-ի վրա սահմանված օպերատոր, որը նշանակենք $\mathcal{B}$-ով: Եթե $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in \tilde{L}$, ապա $\mathcal{B}x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{A} e_j$: Պարզ է, որ L տարածության վրա $\mathcal{B}$-ն համընկնում է $\mathcal{A}$-ի հետ:

Ցույց տանք, որ $\mathcal{B}$ օպերատորն ունիտար է: Դիցուք $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in \tilde{L}$: Ունենք՝

$$(\mathcal{B}x,\mathcal{B}x) = \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathcal{A}e_j, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathcal{A}e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\bar{\alpha}_k(\mathcal{A}e_j,\mathcal{A}e_k) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\bar{\alpha}_k(e_j,e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right) = (x,x)$$

Այժմ, համաձայն Թեորեմ 27-ի ստանում ենք.

կամայական օրթոգոնալ A մատրիցի համար գոյություն ունի օրթոգոնալ Q մատրից, այնպիսի, որ $Q^{-1}AQ$ մատրիցը կազմված է անկյունագծային բլոկերից, որոնք կամ 1-չափանի են և հավասար են ± 1, կամ էլ 2-չափանի են և ունեն (43) տեսքը՝

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} \tag{43}$$

որտեղ $\sigma^2+\tau^2 = 1$։

Ակնհայտ է, որ (43) տեսքի մատրիցը կարելի է վերարտագրել որպես՝

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

որտեղ $\sin\varphi \neq 0$։

Հերմիտյան (Սիմետրիկ) օպերատորներ

Սահմանում: L ունիտար (օրթոգոնալ) տարածությունում գործող A գծային օպերատորը կոչվում է **Հերմիտյան** (սիմետրիկ), եթե բոլոր $x, y \in L$ համար տեղի ունի՝

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \qquad (44)$$

Ակնհայտ է, որ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ և $\mathcal{A}$-ն նորմալ օպերատոր է:

Դիցուք՝

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\text{-ն}$$

օրթոնորմալ բազիս է և A-ն $\mathcal{A}$ օպերատորի ներկայացումն է այդ բազիսում, այսինքն $\mathcal{A}\mathcal{E} = A\mathcal{E}$: Քանի որ՝ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, ապա $A^* = A$ և A մատրիցը ինքնահամալուծ է: Պարզ է, որ $A^* = A$ պայմանից հետևում է $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ պայմանը, ուստի՝

օրթոնորմալ բազիսներում Հերմիտյան (սիմետրիկ) օպերատորներին համապատասխանում են ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) մատրիցները:

Դյուրին է ստուգել, որ՝

1. **Եթե $\mathcal{A}$-ն և $\mathcal{B}$-ն Հերմիտյան (սիմետրիկ) են, ապա Հերմիտյան (սիմետրիկ) են նաև $\mathcal{A}+\mathcal{B}$-ն և $\lambda\mathcal{A}$-ն**

2. **Եթե $\mathcal{A}$-ն և $\mathcal{B}$-ն Հերմիտյան (սիմետրիկ) են, ապա**

AB-ն Հերմիտյան (սիմետրիկ) է $\Leftrightarrow AB = BA$

Դիցուք A-ն Հերմիտյան (սիմետրիկ) օպերատոր է և λ-ն նրա սեփական արժեքն է, իսկ x-ը համապատասխան սեփական վեկտորն է: Տեղի ունի՝

$$\lambda(x,x) = (\lambda x,x) = (Ax,x) = (x,Ax) = (x,\lambda x) = \bar{\lambda}(x,x):$$

Հետևաբար, $\lambda = \bar{\lambda}$, այսինքն՝

Հերմիտյան (սիմետրիկ) օպերատորի սեփական արժեքներն իրական թվեր են:

Եթե գծային տարածությունն էվքլիդեսյան է և A օպերատորը սիմետրիկ, ապա ընդլայնված ունիտար տարածությունում ընդլայնված B օպերատորը Հերմիտյան է: Իսկապես,

$$(Bx,y) = \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j Ae_j, \sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\bar{\beta}_k(Ae_j,e_k) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\bar{\beta}_k(e_j,Ae_k) = \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j, \sum_{k=1}^{n}\beta_k Ae_k\right) = (x,By)$$

Վերջին նկատառումից, այն փաստից, որ Հերմիտյան (սիմետրիկ) օպերոտորը նորմալ է և Թեորեմներ 23 և 24-ից ստանում ենք, որ

կամայական Հերմիտյան (սիմետրիկ) օպերատորի համար գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս կազմված սեփական վեկտորներից և կամայական ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) A մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի ունիտար (օրթոգոնալ) Q մատրից, որ $Q^{-1}AQ$ մատրիցն

անկյունագծային է և իրական:

Ինչպես արդեն պարզել ենք, սկալյար արտադրյալը ֆիքսված բազիսի դեպքում տրվում է ինքնահամալուծ (կամ սիմետրիկ իրական դաշտի դեպքում) դրականորեն որոշված մատրիցով: Նշել էինք, որ այդպիսի մատրից կարելի է կառուցել վերցնելով BB^* արտադրյալը, որտեղ B-ն չվերասերված մատրից է: Վերը շարադրվածից ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) օպերատորների վերաբերյալ հետևում է, որ, եթե A-ն ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) դրականորեն որոշված մատրից է, ապա միշտ կգտնվի չվերասերված B մատրից այնպիսին, որ $A = BB^*$: Իրոք, քանի որ A-ն ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) է, ապա կգտնվի ունիտար (օրթոգոնալ) Q մատրից, որ $Q^{-1}AQ$-ն անկյունագծային է, այսինքն՝

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

որտեղ λ_i իրական են, $i = 1,\ldots,n$: Պարզ է, որ $Q^{-1}AQ = Q^*AQ$ և, եթե $\Lambda \neq 0$, ապա՝

$$\Lambda Q^{-1}AQ\Lambda^* = \Lambda Q^*AQ\Lambda^* = \Lambda Q^*A(\Lambda Q^*)^*:$$

Քանի որ Q-ն չվերասերված է, եթե $\Lambda \neq 0$, ապա $\Lambda Q^* \neq 0$ և A-ի դրականորեն որոշվածությունից ստանում ենք, որ $\Lambda Q^*A(\Lambda Q^*)^* > 0$: Ուստի, $Q^{-1}AQ$-ն դրականորեն որոշված է: Դյուրին է համոզվել, որ $\lambda_i > 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$: Իսկապես, եթե, օրինակ, $\lambda_1 \leq 0$, ապա $\Lambda = (1,0,\ldots,0) \neq 0$ և $\Lambda Q^{-1}AQ\Lambda^* = \lambda_1 \leq 0$, ինչը հակասում է $Q^{-1}AQ$-ի դրականորեն որոշվածությանը: Այժմ նշանակենք

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}:$$

Ակնհայտ է, որ $C^* = C$, $\det C > 0$ և $Q^{-1}AQ = CC^*$: Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ՝

$$A = QCC^*Q^{-1} = QCC^*Q^* = (QC)(QC)^* = BB^*,$$

որտեղ $B = QC$ և $\det B \neq 0$:

Քառակուսային ձևեր

Սահմանում։ Հերմիտյան քառակուսային ձև է կոչվում $x_1,\ldots,x_n$ փոփոխականների կոմպլեքս գործակիցներով հետևյալ տեսքի երկրորդ կարգի բազմանդամը՝

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i\bar{x}_j,$$

որի գործակիցները բավարարում են $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$ պայմանին $(i,j = 1,\ldots,n)$։

Իրական քառակուսային ձև է կոչվում $x_1,\ldots,x_n$ փոփոխականների իրական գործակիցներով հետևյալ տեսքի երկրորդ կարգի բազմանդամը՝

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j\text{։}$$

Իրական քառակուսային ձևերի դեպքում միշտ կարելի է համարել, որ $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i,j = 1,\ldots,n$։ Իսկապես, վերարտագրենք $f(x_1,\ldots,x_n)$-ի երկու հետևյալ անդամների գումարը՝

$$\alpha_{ij}x_ix_j + \alpha_{ji}x_jx_i = \frac{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}{2}x_ix_j + \frac{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}{2}x_jx_i$$

և դրանով հավասարեցնենք x_ix_j-ի և x_jx_i-ի գործակիցները։

Քառակուսային ձևին (անկախ այն բանից թե դա հերմիտյան է, թե իրական) համապատասխանեցնենք գործակիցներից կազմված $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ մատրիցը։ Պարզ է, որ հերմիտյան քառակուսային ձևի մատրիցը կլինի ինքնահամալուծ, իսկ իրականինը՝ սիմետրիկ։

Նշանակենք **x**-ով փոփոխականների վեկտորը՝ $(x_1,\ldots,x_n)$ ։ Պարզ է, որ քառակուսային ձևը կարելի է գրել մատրիցների արտադրյալի տեսքով՝

$$f(x_1,\dots,x_n) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^*$$

Հերմիտյան դեպքում և

$$f(x_1,\dots,x_n) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$$

իրական դեպքում:

Դիցուք ունենք փոփոխականների մեկ այլ համակարգ՝ $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_n)$, որը գծայնորեն կապված է հնի հետ, այսինքն գոյություն ունի մի չվերասերված մատրից $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ (որի տարրերը K դաշտից են, $K = R,\mathbb{C}$) այնպիսին, որ $\mathbf{x} = \mathbf{y}Q$: Քառակուսային ձևը նոր փոփոխականների համակարգում կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}Q)A(\mathbf{y}Q)^* = (\mathbf{y}Q)A(Q^*\mathbf{y}^*) = \mathbf{y}(QAQ^*)\mathbf{y}^*, \text{ եթե } K = \mathbb{C}$$
$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = (\mathbf{y}Q)A(\mathbf{y}Q)^T = (\mathbf{y}Q)A(Q^T\mathbf{y}^T) = \mathbf{y}(QAQ^T)\mathbf{y}^T, \text{ եթե } K = R$$

Այսինքն, նոր փոփոխականներին անցման դեպքում քառակուսային ձևի A մատրիցը ձևափոխվում է QAQ^* կամ QAQ^T բանաձևով, որտեղ Q-ն նոր փոփոխականների անցման մատրիցն է:

Հայտնի է, որ հարթության մեջ երկրորդ կարգի կորերը (էլիպսը, հիպերբոլը, պարաբոլը) նաև եռաչափ տարածությունում երկրորդ կարգի մակերևույթները տրվում են երկրորդ կարգի բազմանդամների միջոցով: Ճիշտ է նաև հակառակը՝ կամայական երկրորդ կարգի երկու կամ երեք փոփոխականի բազմանդամ կարելի փոփոխականների գծային ձևափոխությամբ բերել հայտնի կորերի կամ մակերևույթների հավասարումներին: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ կոորդինատային համակարգի հարմար ընտրությամբ բազմանդամը կարելի է բերել ստանդարտ (կանոնական) պարզ տեսքի (օրինակ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ էլիպսի դեպքում): Պարզվում է, որ նման արդյունք կարելի է ստանալ նաև n փոփոխականի քառակուսային ձևերի համար: Համաձայն Թեորեմ 23-ի հերմիտյան կամ սիմետրիկ օպերատորների համար միշտ գոյություն ունի ունիտար կամ օրթոգոնալ Q մատրից, այնպիսին, որ A մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի, այսինքն՝

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

որտեղ λ_i թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են (հիշենք, որ դրանք միշտ իրական են): Քանի որ Q մատրիցը ունիտար (օրթոգոնալ) է, ապա $Q^* = Q^{-1}$ $(Q^T = Q^{-1})$: Դա նշանակում է, որ միշտ կարելի է անցնել նոր փոփոխականների այնպես, որ քառակուսային ձևը ստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{gathered} \lambda_1 y_1 \bar{y}_1 + \lambda_2 y_2 \bar{y}_2 + \ldots + \lambda_k y_k \bar{y}_k, \text{ եթե } K = \mathbb{C} \\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2, \text{ եթե } K = R \end{gathered} \tag{45}$$

որտեղ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$-ն A մատրիցի բոլոր ոչ զրոյական սեփական արժեքներն են: Նկատենք, որ $k = rankA$ և ոչ զրոյական գումարելիների քանակը կանոնական տեսքում կլինի հավասար k:

(45) տեսքի քառակուսային ձևերը կոչվում են **կանոնական ձևեր** (տեսքեր):

Այսպիսով ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 28.

Կամայական քառակուսային ձև փոփոխականների ունիտար կամ օրթոգոնալ ձևափոխությամբ բերվում է (45) կանոնական տեսքի, որտեղ k-ն քառակուսային ձևի մատրիցի ռանգն է, իսկ $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$-ն A մատրիցի բոլոր ոչ զրոյական սեփական արժեքներն են:

Կոմպլեքս դաշտի դեպքում, կատարելով $z_i = \sqrt{\lambda_i}\, y_i,\ \ i = 1,\ldots,k$ փոփոխականների ձևափոխությունը, (որն ընդհանուր դեպքում ունիտար չէ) կանոնական տեսքի քառակուսային ձևը կբերենք

$$z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_k\bar{z}_k$$

տեսքին, որը կոչվում է նորմալ տեսք:

Դիցուք իրական թվերի դաշտի դեպքում կանոնական տեսքում առաջին m սեփական արժեքները դրական են, իսկ մնացածը՝ բացասական: Կատարենք փոփոխականների հետևյալ ձևափոխությունը՝ (որն ընդհանուր դեպքում օրթոգոնալ չէ)

$$z_i = \sqrt{\lambda_i}\, y_i,\ i = 1,\ldots,m \ \text{և}\ z_i = \sqrt{-\lambda_i}\, y_i,\ i = m+1,\ldots,k$$

և քառակուսային ձևը կբերվի հետևյալ տեսքին՝

$$z_1^2 + \ldots + z_m^2 - z_{m+1}^2 \ldots - z_k^2$$

Թեորեմ 29. (Իներցիայի օրենքը)

Իրական քառակուսային ձևը փոփոխականների ինչպիսի ձևափոխությամբ էլ որ բերվի (45) կանոնական տեսքին, դրական և բացասական անդամների քանակները չեն փոխվի և միշտ կլինեն Հավասար Համապատասխանաբար m-ին և k-ին:

Ապացույց. Դիցուք՝

$$\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_m y_m^2-\lambda_{m+1}y_{m+1}^2-\ldots-\lambda_k y_k^2$$

տեսքի քառակուսային ձևը ($\lambda_i>0,\ i=1,\ldots,k$) փոփոխականների $y=zQ$ ձևափոխությամբ բերվել է նաև՝

$$\mu_1 z_1^2+\ldots+\mu_s z_s^2-\mu_{s+1}z_{s+1}^2-\ldots-\mu_k z_k^2$$

տեսքին ($\mu_i>0, i=1,\ldots,k$) և $m<s$: Ակնհայտ է, որ եթե

$$\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_m y_m^2-\lambda_{m+1}y_{m+1}^2-\ldots-\lambda_k y_k^2=$$
$$\mu_1 z_1^2+\ldots+\mu_s z_s^2-\mu_{s+1}z_{s+1}^2-\ldots-\mu_k z_k^2$$

Հավասարության մեջ y_i փոփոխականները փոխարինենք $z_1,\ldots,z_n$-ի արտահայտություններով, ապա կստանանք նույնություն: Արտագրենք այդ նույնությունը՝

$$\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_m y_m^2+\mu_{s+1}z_{s+1}^2+\ldots+\mu_k z_k^2=$$
$$\mu_1 z_1^2+\ldots+\mu_s z_s^2+\lambda_{m+1}y_{m+1}^2+\ldots+\lambda_k y_k^2 \tag{46}$$

Կազմենք $z_1,\ldots,z_n$ փոփոխականներով գծային Հավասարումների Հետևյալ Համակարգը (քանի որ y_i-ին արտահայտված են $z_1,\ldots,z_n$-ի միջոցով)՝

$$y_1=0,\ \ldots,\ y_m=0,\ z_{s+1}=0,\ \ldots,\ z_n=0 \tag{47}$$

Այս Համակարգը Համասեռ է և Հավասարումների քանակը խիստ փոքր է անհայտների քանակից՝ $m+n-s<n$ (քանի որ $m<s$): Ուստի, գոյություն ունի (47) Համակարգի ոչ զրոյական լուծում

$$z_1=\beta_1,\ldots,z_s=\beta_s,z_{s+1}=0,\ldots,z_n=0 \tag{48}$$

Տեղադրելով այդ լուծումը (46)-ի մեջ ստանում ենք՝

$$\mu_1\beta_1^2 + \ldots + \mu_s\beta_s^2 + \lambda_{m+1}y_{m+1}^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2 = 0։$$

Բայց $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0 \quad (i = 1,\ldots,k)$, ուրեմն՝

$$\beta_1 = \ldots = \beta_s = y_{m+1} = \ldots = y_k = 0։$$

Սակայն $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$ պայմանը հակասում է (48)-ի ոչ զրոյական լինելուն։ Թեորեմն ապացուցված է։

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Мальцев А.И., **Основы линейной алгебры**, "Наука", Москва, 1970
2. Курош А.Г., **Курс высшей алгебры**, "Наука", Москва, 1971
3. Гельфанд И.М., **Лекции по линейной алгебре**, "Наука", Москва, 1971
4. С.Ленг. **Алгебра**, “Мир”, Москва 1968